

البكالوريا بين يديك

BAC

محمد صابور

الأعداد المركبة

100 تمرين تطبيقي

البرهان الجديد

Scanned by : Mekkaoui Ayoub
Email: ayoubsoft2011@hotmail.fr

إهداء لا بُدّ منه ...

إلى الأخ " سرحات " .
لا تترك تمريناً في هذا الكُتَيْب دون حَلِّه!
رجائي لك بالتّوفيق الكثير..

أيّوب.

الأعداد المركبة

(البرنامج الجديد)

100 تمرين تطبيقي

شعبة : علوم تجريبية
شعبة : رياضيات
شعبة : تقني رياضي

حقوق الطبع محفوظة للمؤلف

رقم الإيداع القانوني : 3375- 2007

ردمك : 4 - 1864 - 0 - 9947 - 978 - ISBN :

طبع بمطبعة ع - بن - برج الكيفان -
الجزائر

المقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله رب العالمين و الصلاة والسلام على أشرف
المرسلين سيدنا محمد صلى الله عليه وسلم .
أما بعد ، خير ما أبدأ به في مقدمة هذا الكتيب هو كلام
الله و حديث رسوله الكريم . إذ يقول الله تعالى في محكم
تنزيله " قل هل يستوي الذين يعلمون والذين لا يعلمون "
ويقول الرسول صلى الله عليه وسلم :
" العلم فريضة على كل مسلم "
تواصل السلسلة المعروفة بـ : " البكالوريا بين يديك "
صدورها إذ تقدم لكم أبنائي الطلبة كتيب في البرنامج
الجديد عنوانه " الامتحان المرحبة "
يحتوي هذا الكتيب على 100 تمرين تطبيقي متنوعة منها
المحلولة حلا مفصلا وأخرى مرفقة بالنتائج ليقوم بها
الطالب معلوماته وتمارين مقترحة للحل .
إن معظم التمارين الموجودة هي " نموذج بكالوريا "
وأخيرا أتمنى لكل القراء من طلبتنا الأعزاء التوفيق ،
كما أرجو من زملائي أساتذة الرياضيات أن يمدوني
بملاحظاتهم البناءة لتحسين محتوى هذا الكتيب .

الأستاذ : محمد صابور

الإهداء

إلى والدي الكريمين .

إلى رجال التعليم المخلصين في واجبهم
إلى أبنائي الطلبة متمنيا لهم النجاح في

شهادة البكالوريا .

أهدي هذا الكتيب المتواضع .

الأستاذ : محمد صابور

الأعداد المركبة

- الشكل الحبري:

$z = x + iy$ و $z' = x' + iy'$ عدنان مركبان .

$z = 0$ معناه $(x = 0 \text{ و } y = 0)$

$z = z'$ معناه $(x = x' \text{ و } y = y')$

$$z + z' = (x + x') + (y + y')i$$

$$z \times z' = (xx' - yy') + (xy' + yx')i$$

$$z + \bar{z} = 2x \quad , \quad \bar{z} = x - iy$$

$$z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 \quad , \quad z - \bar{z} = 2yi$$

$z = \bar{z}$ حقيقي معناه تخيلي z معدوم يكافئ

z تخيلي معناه حقيقي z معدوم يكافئ $z + \bar{z} = 0$

$$\left(\frac{z}{z'}\right) = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}} \quad , \quad \overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'} \quad , \quad \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$$

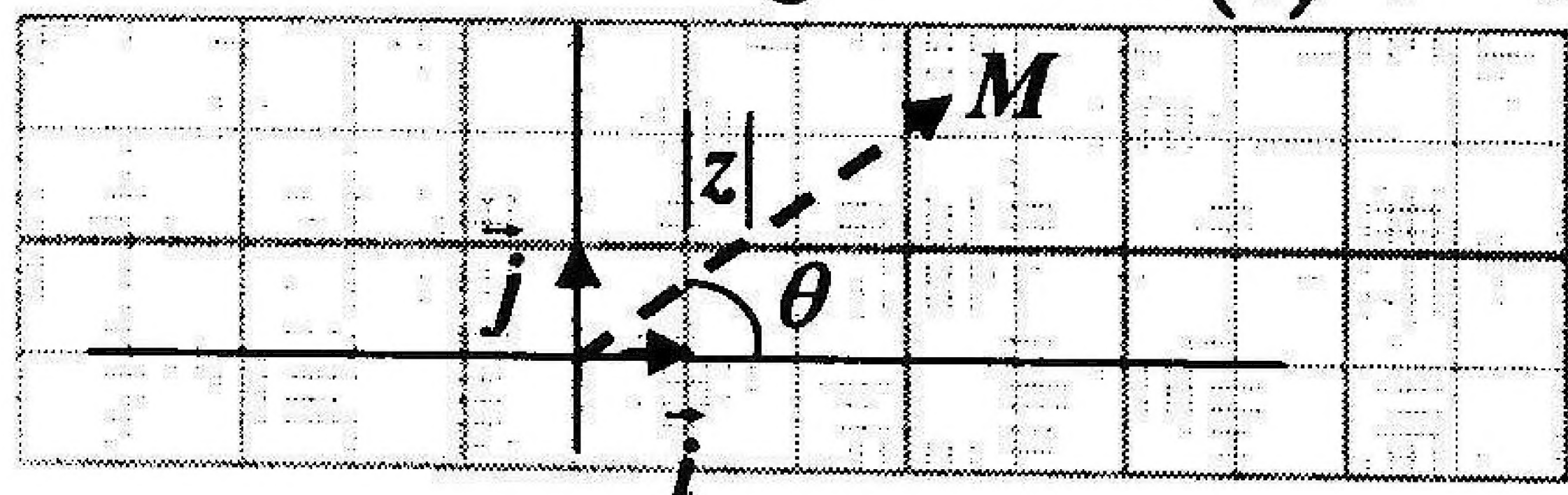
- التمثيل الهندسي لعدد مركب :

$z = x + iy$ عدد مركب غير معدوم . النقطة $M(x; y)$

تسمى صورة العدد المركب z . العدد المركب z يسمى

لاحقة M ونكتب $M(z)$. الشعاع \overline{OM} هو صورة العدد

المركب z .



- طويلة عدد مركب :

z عدد مركب حيث $z = x + iy$. نسمي طويلة z العدد الحقيقي الموجب $\sqrt{x^2 + y^2}$ ، نرسم لطويلة z ب: $|z|$. $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

خواص:

$$|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'| , \quad \left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|} , \quad \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

$$|z^n| = |z|^n , \quad |z + z'| \leq |z| + |z'|$$

- عمدة عدد مركب غير معدوم :

تعريف :

z عدد مركب غير معدوم ، صورته M . نسمي عمدة العدد المركب z كل قياس للزاوية $(\vec{i}; \vec{OM})$ ورمزه $\arg z$.

خواص:

$$\arg \frac{1}{z} \equiv -\arg z [2\pi] , \quad \arg z \cdot z' \equiv \arg z + \arg z' [2\pi]$$

$$\arg \frac{z}{z'} \equiv \arg z - \arg z' [2\pi] , \quad \arg z^n \equiv n \times \arg z [2\pi]$$

$$\arg(-z) \equiv \pi + \arg z [2\pi] , \quad \arg \bar{z} \equiv -\arg z [2\pi]$$

- الشكل المثلثي لعدد مركب :

كل عدد مركب z طويلته r وعمدته θ يكتب على الشكل : $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ تسمى هذه الكتابة بالشكل المثلثي للعدد المركب z .

الانتقال من الشكل الجبري $z = x + iy$ للعدد المركب إلى الشكل المثلثي يتم بمعرفة الطويلة r و العمدة θ .

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{و المساويتين :}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{و} \quad \sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{تعيينان العدد } \theta .$$

- الترميز : $e^{i\theta}$

نصطلح أن نرسم للعدد المركب $z = \cos \theta + i \sin \theta$ ب: $z = e^{i\theta}$.

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad \text{من المساويتين :}$$

$$e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta \quad \text{نستنتج أن :}$$

$$\sin \theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) , \quad \cos \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$$

هاتين العلاقتين تسميان بقوانين "Euler" وتستعمل خاصة في تحويل العبارات المثلثية إلى عبارات خطية .

تمارين محلولة

تمرين 01

أحسب مايلي: (1) $(1+3i)(2-5i)$

(2) $(1+3i)(-2+i) - (-3+i)(1+i)$

(3) $(2-3i)^2 - i(1+3i)$

الحل

(1) $(1+3i)(2-5i) = 2 - 5i + 6i + 15 = \boxed{17+i}$

(2) $(1+3i)(-2+i) - (-3+i)(1+i) =$

$(-2+i-6i-3) - (-3-3i+i-1) =$

$(-5-5i) - (-4-2i) = -5-5i+4+2i = \boxed{-1-3i}$

(3) $(2-3i)^2 - i(1+3i) = (4-12i-9) - i+3 =$
 $= \boxed{-2-13i}$

تمرين 02

باستعمال الجداءات الشهيرة ، احسب ما يلي :

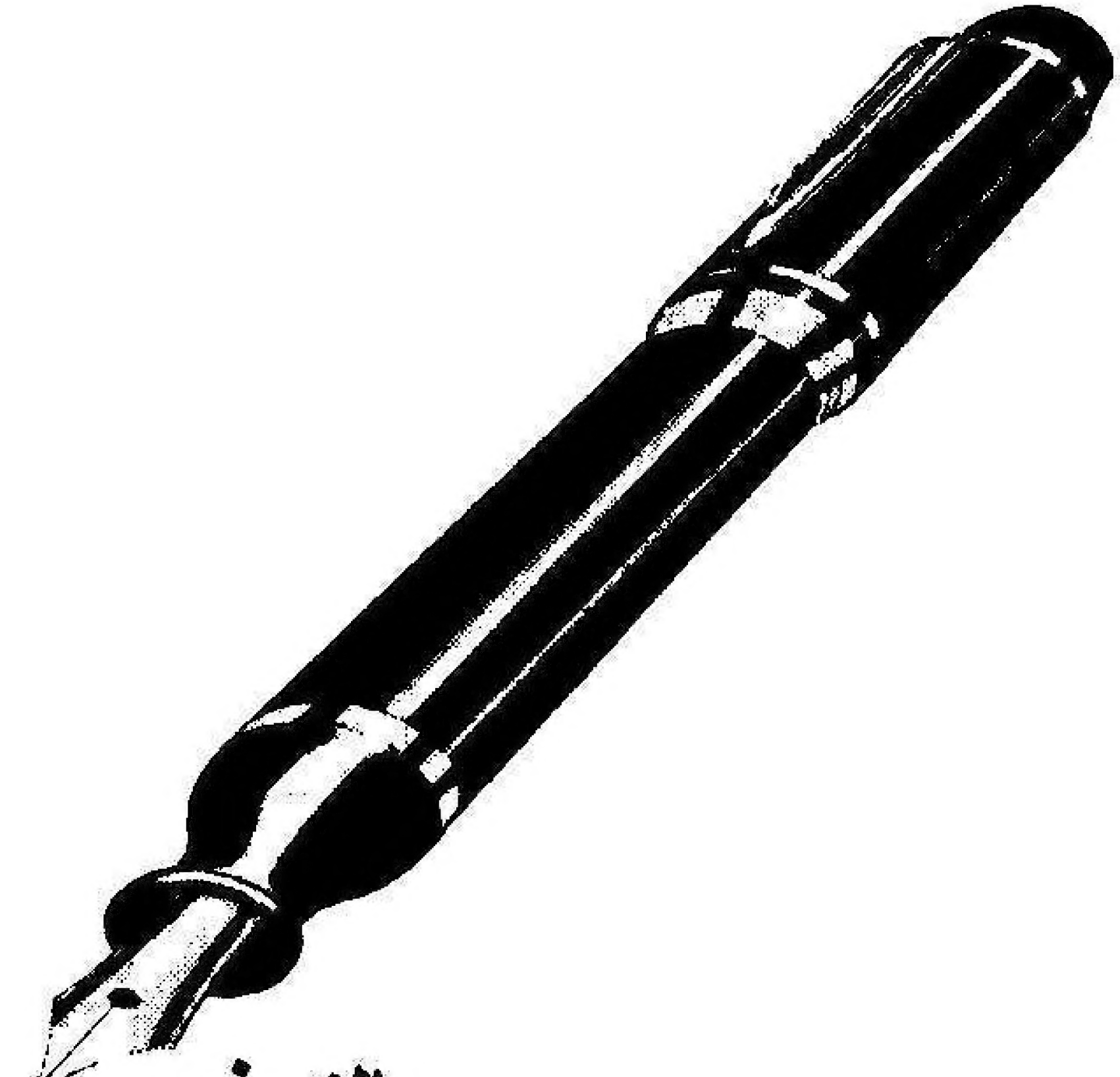
(1) $(1+i)^3$. (2) $(2-3i)(2+3i)$. (3) $(2-i)^3$.

(4) $i(1+2i)^2 - (-1+i)^2$

الحل

(1) $(1+i)^3 = 1^3 + 3i + 3i^2 + i^3$

$= 1 + 3i - 3 - i = \boxed{-2+2i}$



بالتوفيق إن شاء الله
في البكالوريا

Scanned by : Mekkaoui Ayoub
Email: ayoubsoft2011@hotmail.fr

$$L_1 = (1+2i-2i) \left[(1+2i)^2 + 2i(1+2i) + (2i)^2 \right]$$

$$= 1 \times (1+4i-4+2i-4-4) = \boxed{-11+6i}$$

$$L_2 = (3+2i)^2 + (1+i)^2 = (3+2i)^2 - i^2(1+i)^2$$

$$= (3+2i)^2 - [i(1+i)]^2 = (3+2i)^2 - (-1+i)^2$$

$$= [(3+2i) - (-1+i)][(3+2i) + (-1+i)]$$

$$= \boxed{(4+i)(2+3i)}$$

تمرين 04

1- أ) احسب i^8, i^7, i^6, i^5, i^4

ب) استنتج حساب : $i^n (n \in \mathbb{N})$

2- احسب : $(1+i)^{2002}, (1+i)^2$

الحل

$$i^4 = i^2 \times i^2 = (-1)(-1) = +1 \quad (1-1)$$

$$i^6 = i^4 \times i^2 = (+1)(-1) = -1, \quad i^5 = i^4 \times i = (+1)i = i$$

$$i^8 = i^4 \times i^4 = +1, \quad i^7 = i^6 \times i = (-1)i = -i$$

ب) نستنتج من الدراسة السابقة أنه إذا كان : $n = 4k (k \in \mathbb{N})$

فإن : $i^n = 1$ و إذا كان : $n = 4k+1 (k \in \mathbb{N})$ فإن : $i^n = i$

و إذا كان : $n = 4k+2 (k \in \mathbb{N})$ فإن : $i^n = -1$

$$(2-3i)(2+3i) = 2^2 - (3i)^2 \quad (2)$$

$$= 4 - 9i^2 = 4 + 9 = \boxed{13}$$

$$(2-i)^3 = 2^3 - 3(2)^2 i + 3(2)(i)^2 - i^3 \quad (3)$$

$$= 8 - 12i - 6 + i = \boxed{2-11i}$$

$$i(1+2i)^2 - (-1+i)^2 = \quad (4)$$

$$i(1+4i-4) - (1-2i-1) = i(-3+4i) + 2i$$

$$= \boxed{-4-i}$$

تمرين 03

اكتب العبارات الآتية على شكل جداء عاملين :

$$L_1 = (1+2i)^3 + 8i, \quad L = 4(2+i)^2 + 9$$

$$L_2 = (3+2i)^2 + (1+i)^2$$

الحل

$$L = 4(2+i)^2 + 9 = [2(2+i)]^2 - (3i)^2$$

$$= [2(2+i) - 3i][2(2+i) + 3i]$$

$$= \boxed{(4-i)(4+5i)}$$

$$L_1 = (1+2i)^3 + 8i = (1+2i)^3 - (2i)^3$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \quad \text{ومنه}$$

$$i^3 \times \frac{1-i}{1+i} = -i \times \frac{1-i}{1+i} = \frac{-1-i}{1+i} = -\frac{1+i}{1+i} = \boxed{-1}$$

تمرين 06
أكتب على الشكل الجبري.

$$(1+i)^{32} - \frac{5i}{1+2i} \quad (3) \cdot \frac{1}{1+\sqrt{2}-i} \quad (2) \cdot \frac{1+i}{1-i} + \frac{2+i}{1+i} \quad (1)$$

الحل

$$\frac{1+i}{1-i} + \frac{2+i}{1+i} = \frac{(1+i)^2 + (2+i)(1-i)}{(1-i)(1+i)} = \boxed{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i} \quad (1)$$

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}-i} = \frac{1+\sqrt{2}+i}{(1+\sqrt{2}-i)(1+\sqrt{2}+i)} \quad (2)$$

$$= \frac{1+\sqrt{2}+i}{(1+\sqrt{2})^2 + 1} = \boxed{\frac{1+\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}} + \frac{1}{4+2\sqrt{2}}i}$$

$$(1+i)^{32} - \frac{5i}{1+2i} = \left[(1+i)^2\right]^{16} - \frac{5i(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} \quad (3)$$

$$= (2i)^{16} - \frac{10+5i}{5} = 2^{16} \times (i^4)^4 - (2+i)$$

$$= \boxed{(2^{16} - 2) - i}$$

و إذا كان : $n = 4k + 3 (k \in \mathbb{N})$ فإن : $i^n = -i$.

(2) حساب : $(1+i)^2$ ، $(1+i)^{2002}$.

$$(1+i)^2 = 2i$$

$$(1+i)^{2002} = \left[(1+i)^2\right]^{1001} = (2i)^{1001}$$

$$= 2^{1001} \times i^{1001} = \boxed{2^{1001}i}$$

(لأن $1001 = 4 \times 250 + 1$ من الشكل $4k + 1$)

تمرين 05

أكتب على الشكل الجبري الأعداد المركبة الآتية :

$$(1) \quad i(1+i)^2 - (1-2i)^2$$

$$(2) \quad i^3 \times \frac{1-i}{1+i} , \quad \frac{-1+3i}{1-2i} , \quad \frac{3-i}{(1+i)^2}$$

الحل

$$i(1+i)^2 - (1-2i)^2 = i(2i) - (-3-4i) \quad (1)$$

$$= \boxed{1+4i}$$

$$\frac{3-i}{(1+i)^2} = \frac{3-i}{2i} = \frac{(3-i)(-i)}{2} = \boxed{-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i} \quad (2)$$

$$\frac{-1+3i}{1-2i} = \frac{(-1+3i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{-7+i}{5} = \boxed{-\frac{7}{5} + \frac{1}{5}i}$$

تمرين 07

α عدد مركب حيث : $\alpha = x + iy$.

نضع $L = (1 - 2i)\alpha + 1 + 3i$ (1) عين α لكي يكون $L = 0$.

(2) أ - عين مرافق L (\bar{L}) . ب - استنتج مجموعة النقاط M ذات اللاحقة α التي من أجلها يكون $L = \bar{L}$.

الحل

(1) تعيين α لكي $L = 0$:

$$L = (1 - 2i)\alpha + 1 + 3i = (1 - 2i)(x + iy) + 1 + 3i \\ = (x + 2y + 1) + i(-2x + y + 3)$$

$$L = 0 \text{ يكافئ } \begin{cases} x + 2y + 1 = 0 \\ -2x + y + 3 = 0 \end{cases} \text{ ومنه } (x; y) = (1; -1)$$

$$\boxed{\alpha = 1 - i} \text{ إذن}$$

(2) - أ) تعيين مرافق L (\bar{L}) .

$$\bar{L} = (x + 2y + 1) - i(-2x + y + 3)$$

ب) تعيين مجموعة النقاط M ذات اللاحقة α :

$$(x + 2y + 1) - i(-2x + y + 3) = (x + 2y + 1) + i(-2x + y + 3) \\ L = \bar{L} \text{ يكافئ}$$

$$-2x + y + 3 = 0 \text{ ومنه } 2i(-2x + y + 3) = 0 \text{ ومنه } -2x + y + 3 = 0$$

إذن مجموعة النقط M المطلوبة هو المستقيم (D) ذو المعادلة:
 $-2x + y + 3 = 0$.

تمرين 08

نعتبر العدد المركب $L = i \left(\frac{z - 2i}{z + i} \right)$ حيث $z = x + iy$.

(1) عين بطريقتين مختلفتين \bar{L} .

(2) أحسب $L + \bar{L}$ ثم استنتج مجموعة النقاط $M(z)$ من أجلها يكون L تخيليا صرفا.

الحل

(1) تعيين L بطريقتين مختلفتين:

$$\bar{L} = \overline{i \left(\frac{z - 2i}{z + i} \right)} = \bar{i} \times \frac{\overline{z - 2i}}{\overline{z + i}} = -i \times \frac{\bar{z} + 2i}{\bar{z} - i} \quad \text{ط 1:}$$

$$= \frac{-i(x - iy) + 2}{x - iy - i} = \frac{(2 - y) - ix}{x - (y + 1)i}$$

$$= \frac{[(2 - y) - ix][x + (y + 1)i]}{[x - (y + 1)i][x + (y + 1)i]}$$

$$= \frac{3x}{x^2 + (y + 1)^2} - \frac{x^2 + y^2 - y - 2}{x^2 + (y + 1)^2} i$$

ط 2:

$$L = i \left(\frac{z - 2i}{z + i} \right) = \frac{iz + 2}{z + i} = \frac{i(x + iy) + 2}{x + iy + i}$$

$$= \frac{(2 - y) + ix}{x + i(y + 1)} = \frac{[(2 - y) + ix][x - i(y + 1)]}{[x + i(y + 1)][x - i(y + 1)]}$$

الحل

لنكتب L على الشكل الجبري:

$$\begin{aligned} L &= \frac{iz - (1+i)}{z - 2i} = \frac{i(x+iy) - (1+i)}{x+iy - 2i} \\ &= \frac{(-y-1) + i(x-1)}{x+i(y-2)} \\ &= \frac{[(-y-1) + i(x-1)][x-i(y-2)]}{[x+i(y-2)][x-i(y-2)]} \\ &= \frac{-3x-y+2}{x^2+(y-2)^2} + \frac{x^2+y^2-x-y-2}{x^2+(y-2)^2}i \end{aligned}$$

(1) تعيين مجموعة النقاط $M(z)$ من أجلها يكون L حقيقيا.
 L حقيقي يعني تخيلي L معدوما ومنه :

$$\left(\frac{x^2+y^2-x-y-2}{x^2+(y-2)^2} = 0 \text{ و } (x,y) \neq (0;2) \right) \text{ ومنه :}$$

$$(x^2+y^2-x-y-2=0 \text{ و } (x,y) \neq (0;2)) \text{ ومنه :}$$

$$\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 2 = 0 \right) \text{ و}$$

$$(x,y) \neq (0;2) \text{ ومنه :}$$

$$= \frac{3x}{x^2+(y+1)^2} + \frac{x^2+y^2-y-2}{x^2+(y+1)^2}i$$

$$\bar{L} = \frac{3x}{x^2+(y+1)^2} - \frac{x^2+y^2-y-2}{x^2+(y+1)^2}i \quad \text{ومنه :}$$

(2) حساب $L + \bar{L}$ واستنتاج مجموعة النقاط $M(z)$ لكي يكون L تخيليا صرفا .

$$L + \bar{L} = \frac{6x}{x^2+(y+1)^2}$$

نعلم أن L تخيليا صرفا معناه : $L + \bar{L} = 0$.

$$L + \bar{L} = 0 \text{ يكافئ } \frac{6x}{x^2+(y+1)^2} = 0 \text{ ومنه :}$$

$$(x=0 \text{ مع } (x,y) \neq (0;-1)) .$$

إذن مجموعة النقاط $M(z)$ المطلوبة هي المستقيم ذو المعادلة $x=0$ (محور الترتيب) باستثناء النقطة $(0;-1)$.

تمرين 09

نعتبر العدد المركب $L = \frac{iz - (1+i)}{z - 2i}$ حيث $z = x + iy$.

(1) عين مجموعة النقاط M ذات اللاحقة z من أجلها يكون L حقيقيا .

(2) عين مجموعة النقاط $M(z)$ لكي يكون L تخيليا صرفا .

(2) عين مجموعة النقط $M(z)$ من أجلها تكون
 $\arg(L) \equiv \pi [2\pi]$

الحل

(1- أ) تعيين مرافق L .

$$\begin{aligned}\bar{L} &= \overline{\left(\frac{z-4-2i}{z+2+i} \right)} = \frac{\bar{z}-4+2i}{\bar{z}+2-i} = \frac{x-iy-4+2i}{x-iy+2-i} \\ &= \frac{(x-4)-i(y-2)}{(x+2)-i(y+1)} \\ &= \frac{[(x-4)-i(y-2)][(x+2)+i(y+1)]}{[(x+2)-i(y+1)][(x+2)+i(y+1)]} \\ &= \frac{x^2+y^2-2x-y-10}{(x+2)^2+(y+1)^2} + \frac{3x-6y}{(x+2)^2+(y+1)^2} i\end{aligned}$$

(ب) استنتاج مجموعة النقط $M(z)$ التي من أجلها يكون L حقيقيا.

لدينا :

$$\bar{L} = \frac{x^2+y^2-2x-y-10}{(x+2)^2+(y+1)^2} + \frac{3x-6y}{(x+2)^2+(y+1)^2} i$$

و نعلم أن : $\bar{L} = L$ ومنه فإن :

$$\left((x; y) \neq (0; 2) \text{ و } \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(y - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{5}{2} \right)$$

إذن مجموعة النقط $M(z)$ المطلوبة هي الدائرة (C) التي

مركزها $O\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ و نصف قطرها $\sqrt{\frac{5}{2}}$ باستثناء النقطة $(0; 2)$

(2) تعيين مجموعة النقط $M(z)$ لكي يكون L تخيليا صرفا.
 L تخيلي يعني حقيقي L معدوما ومنه :

$$\left((x; y) \neq (0; 2) \text{ مع } \left(\frac{-3x-y+2}{x^2+(y-2)^2} \right) = 0 \right)$$

$$(-3x-y+2=0) \text{ مع } ((x; y) \neq (0; 2)).$$

مجموعة النقط $M(z)$ المطلوبة هي المستقيم (D) ذو المعادلة :

$$\boxed{-3x-y+2=0}, \text{ باستثناء النقطة } (0; 2).$$

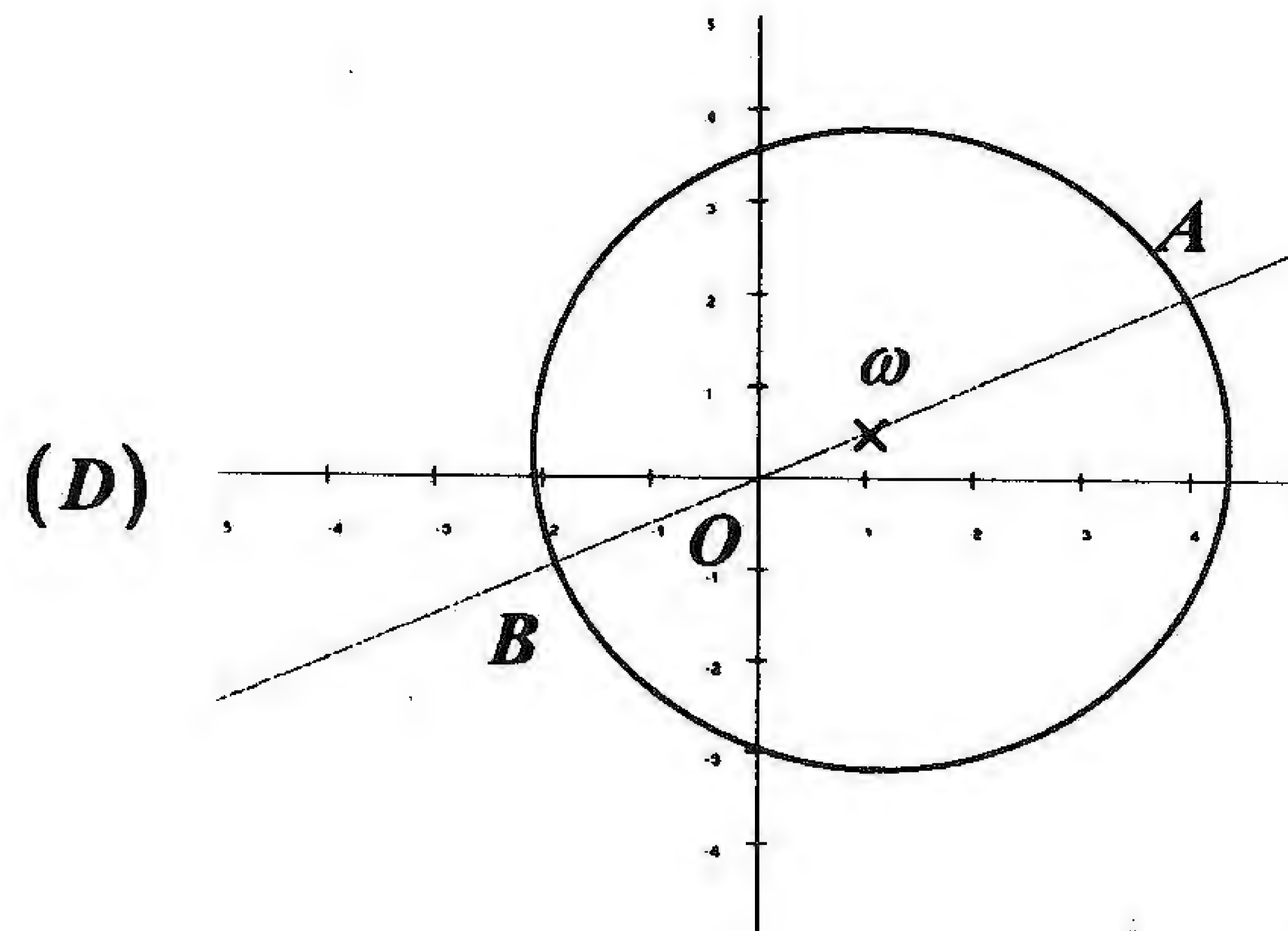
تمرين 10

ليكن L العدد المركب المعروف بـ : $L = \frac{z-4-2i}{z+2+i}$.

(1- أ) عين \bar{L} (مرافق L)

(ب) استنتاج مجموعة النقط $M(z)$ ذات اللاحقة z بحيث

يكون L حقيقيا.



تمرين 11

في مستوي الأعداد المركبة المزود بمعلم متعامد ومتجانس ، نعتبر النقاط A, M, C ذات اللواحق على الترتيب $1+i, z, iz$ حيث : $z = x + iy$

(1) عين مجموعة النقاط $M(z)$ لكي يكون المثلث ACM قائم الزاوية في A .

(2) عين مجموعة النقاط $M(z)$ بحيث تكون $|z-1-i| = |iz-z|$

الحل

(1) تعيين مجموعة النقاط $M(z)$ لكي يكون المثلث ACM قائم الزاوية في A .

لاحقة الشعاع \overline{AC} :

$$\begin{aligned} Z_{\overline{AC}} &= z_C - z_A = iz - 1 - i \\ &= i(x + iy) - 1 - i = (-1 - y) + i(x - 1) \end{aligned}$$

$$L = \frac{x^2 + y^2 - 2x - y - 10}{(x+2)^2 + (y+1)^2} - \frac{3x - 6y}{(x+2)^2 + (y+1)^2} i$$

L حقيقي يعني تخيلي L معدوما ومنه :

($3x - 6y = 0$ و $(x; y) \neq (-2; -1)$) ومنه :

($x - 2y = 0$ و $(x; y) \neq (-2; -1)$)

مجموعة النقاط هي المستقيم $(D): x - 2y = 0$ باستثناء النقطة $(-2; -1)$.

(2) تعيين مجموعة النقاط $M(z)$ من أجلها تكون

$$\arg(L) \equiv \pi [2\pi]$$

$\arg(L) \equiv \pi [2\pi]$ يكافئ $L = 0$ و حقيقي $L > 0$

يكافئ $[3x - 6y = 0$ و $x^2 + y^2 - 2x - y - 10 < 0$ و $(x; y) \neq (-2; -1)$ ومنه :

$$[x - 2y = 0 \text{ و } (x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{45}{4} < 0]$$

و $(x; y) \neq (-2; -1)$

إذن مجموعة النقاط $M(z)$ تنتمي إلى المستقيم (D) ذو

المعادلة $x - 2y = 0$ و تنتمي إلى القرص الذي مركزه

$\omega\left(1; \frac{1}{2}\right)$ ونصف قطره $\frac{\sqrt{45}}{2}$ و هي ممثلة بالقطر $[AB]$

باستثناء النقطتين A و B .

تمرين 12

أكتب الأعداد المركبة الآتية على الشكل المثلثي :

$$z_1 = -2 + 2i ; z_2 = 5 - 5\sqrt{3}i ; z_3 = \sqrt{6} + \sqrt{2}i ;$$

$$z_4 = -2\sqrt{3} - 6i$$

الحل

إذا كانت θ_1 هي عمدة z_1 فإن : $|z_1| = 2\sqrt{2}$

$$\sin \theta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ و } \cos \theta_1 = -\frac{2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ومنه } \theta_1 \text{ تنتمي}$$

$$\text{إلى الربع الثاني ومنه : } \theta_1 \equiv \pi - \frac{\pi}{4} \equiv \frac{3\pi}{4} [2\pi]$$

$$\text{إذن } z_1 = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$$

$$|z_2| = 10 \text{ ، إذا كانت } \theta_2 \text{ هي عمدة } z_2 \text{ فإن : } \cos \theta_2 = \frac{1}{2}$$

$$\text{و } \sin \theta_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ومنه } \theta_2 \text{ تنتمي إلى الربع الرابع ومنه :}$$

$$\theta_2 \equiv -\frac{\pi}{3} [2\pi] \text{ إذن } z_2 = 10 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right)$$

$$|z_3| = 2\sqrt{2} \text{ ، إذا كانت } \theta_3 \text{ هي عمدة } z_3 \text{ فإن : } \cos \theta_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{و } \sin \theta_3 = \frac{1}{2} \text{ ومنه } \theta_3 \text{ تنتمي إلى الربع الأول ومنه :}$$

$$\text{ومنه : } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -y-1 \\ x-1 \end{pmatrix}$$

لاحقة الشعاع \overrightarrow{AM} :

$$Z_{\overrightarrow{AM}} = Z_M - Z_A = z - 1 - i$$

$$\text{ومنه : } \overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} = (x-1) + i(y-1)$$

يكون المثلث ACM قائم الزاوية في A إذا كان $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ ومنه :

$$(x-1)(-y-1) + (y-1)(x-1) = 0$$

$$(x-1)(-y-1+y-1) = 0 \text{ ومنه } -2(x-1) = 0$$

$$\text{ومنه } x = 1$$

إذن مجموعة النقط المطلوبة هي المستقيم ذو المعادلة $x = 1$.

(2) تعيين مجموعة النقط $M(z)$:

$$|z-1-i| = |iz-z| \text{ يكافئ}$$

$$|(x-1)+i(y-1)| = |(-y-x)+i(x-y)|$$

$$\text{ومنه } (x-1)^2 + (y-1)^2 = (-x-y)^2 + (x-y)^2$$

$$\text{ومنه : } x^2 + y^2 + 2x + 2y - 2 = 0$$

$$\text{ومنه : } (x+1)^2 + (y+1)^2 - 4 = 0$$

$$(x+1)^2 + (y+1)^2 = 4 \text{ . إذن مجموعة النقط المطلوبة هي}$$

الدائرة التي مركزها $\omega(-1; -1)$ ونصف قطرها 2 .

$$\equiv \frac{3\pi}{4} + \left(-\frac{\pi}{6}\right) \equiv \frac{7\pi}{12} [2\pi]$$

$$. L = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right) : \text{ومنه}$$

$$|L_1| = |1+i|^3 \times |-2i| = (\sqrt{2})^3 \times 2 = 4\sqrt{2} *$$

$$\arg L_1 \equiv \arg(1+i)^3 + \arg(-2i)$$

$$\equiv 3\arg(1+i) + \arg(-2i) \equiv \frac{3\pi}{4} + \left(-\frac{\pi}{2}\right) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$$

$$. L_1 = 4\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) : \text{ومنه}$$

$$|L_2| = |\sqrt{3}+i|^3 \times \left| -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right|^2 = 2^3 \times 1 = 8 *$$

$$\arg L_2 \equiv \arg(\sqrt{3}+i)^3 + \arg\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$\equiv 3\arg(\sqrt{3}+i) + 2\arg\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\equiv 3 \times \frac{\pi}{6} + 2 \times \frac{2\pi}{3} \equiv \frac{11\pi}{6} [2\pi]$$

$$. L_2 = 8 \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right) : \text{ومنه}$$

$$. z_3 = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \text{ إذن } \theta_3 \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$$

$$\cos \theta_4 = -\frac{1}{2} : \text{فإن } z_4 \text{ هي عمدة } z_3 \text{ ، إذا كانت } \theta_4 \text{ ، } |z_4| = 4\sqrt{3}$$

$$\text{و } \sin \theta_4 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ومنه } \theta_4 \text{ تنتمي إلى الربع الثالث ومنه :}$$

$$\theta_4 \equiv \pi + \frac{\pi}{3} \equiv \frac{4\pi}{3} [2\pi]$$

$$. z_4 = 4\sqrt{3} \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) \text{ إذن}$$

تمرين 13

(1) اكتب الأعداد المركبة الآتية على الشكل المثلثي :

$$. L_1 = (1+i)^3 (-2i) , L = (-1+i)(\sqrt{3}-i)$$

$$. L_2 = (\sqrt{3}+i)^3 \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2$$

$$. L_3 = i^{2003} (\sqrt{2} + \sqrt{6}i)^2$$

(2) اكتب الأعداد L_2, L_1, L على الشكل الأسّي .

الحل

$$|L| = |-1+i| \times |\sqrt{3}-i| = 2\sqrt{2} * (1)$$

$$\arg L \equiv \arg(-1+i) + \arg(\sqrt{3}-i)$$

$$\arg(z_1) \equiv \arg(-1 + \sqrt{3}i)^4 \equiv 4\arg(-1 + \sqrt{3}i)$$

$$\equiv 4 \times \frac{2\pi}{3} \equiv 2\pi + \frac{2\pi}{3} \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$$

$$. z_1 = 16 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) : \text{ومنه}$$

$$|z_2| = \frac{|1-i|^3}{|1+i\sqrt{3}|^2} = \frac{\sqrt{2}^3}{2^2} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\arg(z_2) \equiv \arg(1-i)^3 - \arg(1+i\sqrt{3})^2$$

$$\equiv 3 \times \arg(1-i) - 2 \times \arg(1+i\sqrt{3})$$

$$\equiv -\frac{3\pi}{4} - \frac{2\pi}{3} \equiv -\frac{17\pi}{12} [2\pi]$$

$$. z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \left(-\frac{17\pi}{12} \right) + i \sin \left(-\frac{17\pi}{12} \right) \right) : \text{ومنه}$$

$$|z_3| = \frac{|i|^{30}}{|\sqrt{3}+i|^{30}} = \frac{1}{2^{30}}$$

$$\arg(z_3) \equiv \arg(i^{30}) - \arg(\sqrt{3}+i)^{30}$$

$$\equiv 30 \times \arg(i) - 30 \times \arg(\sqrt{3}+i)$$

$$|L_3| = |i|^{2003} \times |\sqrt{2} + \sqrt{6}i|^2 = |i|^{2003} \times (\sqrt{8})^2 = 1 \times 8 = 8 *$$

$$\arg L_3 \equiv \arg(i^{2003}) + \arg(\sqrt{2} + \sqrt{6}i)^2$$

$$\equiv 2003 \times \arg(i) + 2 \arg(\sqrt{2} + \sqrt{6}i)$$

$$\equiv 2003 \times \frac{\pi}{2} + 2 \times \frac{\pi}{3} [2\pi]$$

$$\equiv 1001\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} \equiv 1002\pi + \frac{\pi}{6} \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$$

$$. L_3 = 8 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) : \text{ومنه}$$

$$. L_2 = 8e^{i\frac{11\pi}{6}}, L_1 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}, L = 2\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}} \quad (2)$$

تمرين 14

اكتب الأعداد المركبة الآتية على الشكل المثلثي .

$$z_3 = \left(\frac{i}{\sqrt{3}+i} \right)^{30}, z_2 = \frac{(1-i)^3}{(1+i\sqrt{3})^2}, z_1 = \left(\frac{5+11\sqrt{3}i}{7-4\sqrt{3}i} \right)^4$$

الحل

$$z_1 = \left(\frac{5+11\sqrt{3}i}{7-4\sqrt{3}i} \right)^4 = \left(\frac{(5+11\sqrt{3}i)(7+4\sqrt{3}i)}{(7-4\sqrt{3}i)(7+4\sqrt{3}i)} \right)^4$$

$$|z_1| = |-1 + \sqrt{3}i|^4 = 2^4 = 16 : \text{ومنه } z_1 = (-1 + \sqrt{3}i)^4$$

$$\begin{aligned} &\equiv \frac{30\pi}{2} - \frac{30\pi}{6} \equiv 15\pi - 5\pi [2\pi] \\ &\equiv 10\pi \equiv 0 [2\pi] \end{aligned}$$

ومنه : $z_3 = \frac{1}{20^{30}} (\cos 0 + i \sin 0)$

تمرين 15

اكتب الأعداد المركبة الآتية على الشكل المثلثي .

$$z_2 = -\sin \theta + i \cos \theta \quad , \quad z_1 = \sin \theta - i \cos \theta$$

$$z_3 = 1 + \cos \theta + i \sin \theta \quad \text{حيث : } \theta \in [0; 2\pi]$$

الحل

$$\begin{aligned} z_1 = \sin \theta - i \cos \theta &= \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) - i \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \\ &= \cos \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\cdot z_1 = \cos \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \quad \text{ومنه :}$$

$$z_2 = -\sin \theta + i \cos \theta = \cos \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right)$$

$$z_3 = 1 + \cos \theta + i \sin \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2i \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$

$$= 2 \cos \frac{\theta}{2} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right)$$

- إذا كان $\theta \in]0; \pi[$ فإن $\frac{\theta}{2} \in]0; \frac{\pi}{2}[$ إذن $\cos \frac{\theta}{2} > 0$

$$\cdot \text{ومنه : } z_3 = 2 \cos \frac{\theta}{2} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right)$$

- إذا كان $\theta \in]\pi; 2\pi[$ فإن $\frac{\theta}{2} \in]\frac{\pi}{2}; \pi[$ إذن $\cos \frac{\theta}{2} < 0$

$$\cdot \text{ومنه : } z_3 = -2 \cos \frac{\theta}{2} \left[\cos \left(\frac{\theta}{2} + \pi \right) + i \sin \left(\frac{\theta}{2} + \pi \right) \right]$$

تمرين 16

حل في \mathbb{C} المعادلات التالية :

$$(1) \quad 2iz + 2 - i = (1 + i)z + 1$$

$$(2) \quad (1 - 2iz)(1 + i)^2 - (1 + i)z = 0$$

$$\cdot \frac{iz}{1 + i} + \frac{z - 1}{1 - i} = 0 \quad (3)$$

الحل

$$(1) \quad 2iz + 2 - i = (1 + i)z + 1 \quad \text{ومنه :}$$

$$2iz - (1 + i)z = -1 + i \quad \text{ومنه :}$$

الحل

نضع $z = x + iy$ ومنه $\bar{z} = x - iy$.

$$(1) \quad (1+i)z - (2+3i)\bar{z} - 1 + 9i = 0 \text{ ومنه :}$$

$$(1+i)(x+iy) - (2+3i)(x-iy) - 1 + 9i = 0 \text{ ومنه :}$$

$$(-x-4y-1) + i(-2x+3y+9) = 0 \text{ ومنه :}$$

$$\text{ومنه } \begin{cases} -x-4y-1=0 \\ -2x+3y+9=0 \end{cases} \text{ ومنه } (x=3; y=-1) \text{ ومنه :}$$

$$z = \boxed{3-i}$$

$$(2) \quad (z+2i)(\bar{z}+1-3i) = 14+2i \text{ ومنه :}$$

$$z\bar{z} + (1-3i)z + 2i\bar{z} + 2i(1-3i) = 14+2i \text{ ومنه :}$$

$$x^2 + y^2 + (1-3i)(x+iy) + 2i(x-iy) + 6+2i = 14+2i \text{ ومنه :}$$

$$x^2 + y^2 + x + 3y + (y-3x)i + 2y + 2xi - 8 = 0 \text{ ومنه}$$

$$(x^2 + y^2 + x + 5y - 8) + i(-x + y) = 0 \text{ يكافئ}$$

$$\begin{cases} 2x^2 + 6x - 8 = 0 \\ x = y \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} x^2 + y^2 + x + 5y - 8 = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$$

$$\text{ومنه حلول المعادلة هي : } \begin{cases} x_1 = -4 \\ x = y \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x_2 = 1 \end{cases} \text{ ومنه}$$

$$z_2 = \boxed{1+i} \text{ و } z_1 = \boxed{-4-4i}$$

$$z = \frac{-1+i}{-1+i} = \boxed{1} \text{ ومنه } (-1+i)z = -1+i$$

$$(2) \quad (1-2iz)(1+i)^2 - (1+i)z = 0 \text{ ومنه :}$$

$$(1+i)^2 - (1+i)^2 \cdot 2iz - (1+i)z = 0 \text{ ومنه :}$$

$$2i + (4-1-i)z = 0 \text{ ومنه : } 2i + 4z - (1+i)z = 0$$

$$\text{ومنه : } (3-i)z = -2i \text{ ومنه } z = \frac{-2i}{3-i} = \boxed{\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i}$$

$$(3) \quad \frac{(1-i)iz + (1+i)(z-1)}{(1+i)(1-i)} = 0 \text{ ومنه } \frac{iz}{1+i} + \frac{z-1}{1-i} = 0$$

$$\text{ومنه : } \frac{iz + z + z - 1 + iz - i}{2} = 0 \text{ ومنه :}$$

$$(2+2i)z = 1+i \text{ ومنه : } \frac{(2+2i)z - (1+i)}{2} = 0$$

$$\text{ومنه : } z = \frac{1+i}{2(1+i)} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

تمرين 17

حل في \mathbb{C} المعادلات التالية :

$$(1) \quad (1+i)z - (2+3i)\bar{z} - 1 + 9i = 0$$

$$(2) \quad (z+2i)(\bar{z}+1-3i) = 14+2i$$

$$(3) \quad z\bar{z} + (z-\bar{z}) - 2i - 5 = 0$$

$$(3) \quad z\bar{z} + (z - \bar{z}) - 2i - 5 = 0 \text{ يكافئ}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 5 = 0 \\ 2(y - 1) = 0 \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} x^2 + y^2 - 5 = 0 \\ y = 1 \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\text{ومنه حلول المعادلة هي: } z_1 = \boxed{2+i} \text{ و } z_2 = \boxed{-2+i}$$

تمرين 18

احسب الجذور التربيعية للأعداد المركبة التالية:

$$z_3 = 4 \left(\frac{11+2i}{1+2i} \right), \quad z_2 = 8-6i, \quad z_1 = -3+4i$$

الحل

$$\text{- إذا كان } \alpha = x + iy \text{ جذرا تربيعيا للعدد المركب } z_1 \text{ فإن}$$

$$\alpha^2 = z_1$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \quad \dots(1) \\ x^2 + y^2 = |z_1| = 5 \quad \dots(2) \\ xy = 2 \quad \dots(3) \end{cases} \text{ يكافئ } \alpha^2 = z_1$$

$$\text{بجمع (1) و (2) نجد } x^2 = 1 \text{ ومنه: } (x_1 = 1 \text{ أو } x_2 = -1) \text{ بالتعويض في (3) نجد: } y_1 = 2 \text{ و } y_2 = -2 \text{ ومنه:}$$

$$\alpha_2 = \boxed{-1-2i} \text{ و } \alpha_1 = \boxed{1+2i}$$

$$\text{- إذا كان } \beta = x + iy \text{ جذرا تربيعيا للعدد المركب } z_2 \text{ فإن}$$

$$\beta^2 = z_2$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \quad \dots(1) \\ x^2 + y^2 = |z_2| = 10 \quad \dots(2) \\ xy = -3 \quad \dots(3) \end{cases} \text{ يكافئ } \beta^2 = z_2$$

$$\text{بجمع (1) و (2) نجد } x^2 = 9 \text{ ومنه: } (x_1 = -3 \text{ أو } x_2 = +3) \text{ بالتعويض في (3) نجد: } y_1 = 1 \text{ و } y_2 = -1 \text{ ومنه:}$$

$$\beta_2 = \boxed{3-i} \text{ و } \beta_1 = \boxed{-3+i}$$

$$z_3 = 4 \left(\frac{11+2i}{1+2i} \right) = 4 \frac{(11+2i)(1-2i)}{5} = 4(3-4i)$$

$$\text{- إذا كان } \delta = x + iy \text{ جذرا تربيعيا للعدد المركب } z_3 \text{ فإن } \delta^2 = z_3$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 12 \quad \dots(1) \\ x^2 + y^2 = |z_3| = 20 \quad \dots(2) \\ xy = -8 \quad \dots(3) \end{cases} \text{ يكافئ } \delta^2 = z_3$$

$$\text{بجمع (1) و (2) نجد } x^2 = 16 \text{ ومنه: } (x_1 = -4 \text{ أو } x_2 = 4) \text{ بالتعويض في (3) نجد: } y_1 = 2 \text{ و } y_2 = -2 \text{ ومنه:}$$

$$\delta_2 = \boxed{4-2i} \text{ و } \delta_1 = \boxed{-4+2i}$$

تمرين 19

حل في \mathbb{C} المعادلات التالية ذات المجهول z :

بالتعويض في (3) نجد : $y_1 = -4$ و $y_2 = 4$ ومنه :

$$\alpha_2 = -1 + 4i \text{ و } \alpha_1 = 1 - 4i$$

$$z_1 = \frac{(3-2i) + (1-4i)}{2} = \boxed{2-3i} \text{ ومنه حلول المعادلة هي :}$$

$$z_2 = \frac{(3-2i) - (1-4i)}{2} = \boxed{1+i}$$

$$z^2 - (1+i\sqrt{3})z + i\sqrt{3} = 0 \quad (3)$$

$$\Delta = (1+i\sqrt{3})^2 - 4i\sqrt{3} = -2 - 2i\sqrt{3}$$

- إذا كان $\alpha = x + iy$ جذرا تربيعيا للعدد المركب Δ فإن

$$\alpha^2 = \Delta$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -2 & \dots (1) \\ x^2 + y^2 = 4 & \dots (2) \text{ يكافئ } \alpha^2 = \Delta \\ xy = -\sqrt{3} & \dots (3) \end{cases}$$

بجمع (1) و (2) نجد $x^2 = 1$ ومنه : $(x_1 = 1 \text{ أو } x_2 = -1)$

بالتعويض في (3) نجد : $y_1 = -\sqrt{3}$ و $y_2 = +\sqrt{3}$ ومنه :

$$\alpha_2 = -1 + \sqrt{3}i \text{ و } \alpha_1 = 1 - \sqrt{3}i$$

$$z_1 = \frac{(1+\sqrt{3}i) + (1-\sqrt{3}i)}{2} = \boxed{1} \text{ ومنه حلول المعادلة هي :}$$

$$(1) \quad z^2 + (1-3i)z - 2(1+i) = 0$$

$$(2) \quad z^2 - (3-2i)z + 5-i = 0$$

$$(3) \quad z^2 - (1+i\sqrt{3})z + i\sqrt{3} = 0$$

$$(4) \quad (1+i)z^2 - 2(1+4i)z - (3-11i) = 0$$

الحل

$$(1) \quad z^2 + (1-3i)z - 2(1+i) = 0$$

$$\Delta = (1-3i)^2 + 8(1+i) = 2i = (1+i)^2$$

$$z_1 = \frac{-(1-3i) - (1+i)}{2} = \boxed{-1+i} \text{ ومنه :}$$

$$z_2 = \frac{-(1-3i) + (1+i)}{2} = \boxed{2i}$$

$$(2) \quad z^2 + (3-2i)z + 5-i = 0$$

$$\Delta = (3-2i)^2 - 4(5-i) = -15 - 8i$$

- إذا كان $\alpha = x + iy$ جذرا تربيعيا للعدد المركب Δ فإن

$$\alpha^2 = \Delta$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -15 & \dots (1) \\ x^2 + y^2 = 17 & \dots (2) \text{ يكافئ } \alpha^2 = \Delta \\ xy = -4 & \dots (3) \end{cases}$$

بجمع (1) و (2) نجد $x^2 = 1$ ومنه : $(x_1 = 1 \text{ أو } x_2 = -1)$

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = 48 & \dots(1) \\ \alpha^2 + \beta^2 = 50 & \dots(2) \text{ يكافئ } (\alpha + \beta i)^2 = 48 - 14i \\ \alpha\beta = -7 & \dots(3) \end{cases}$$

بجمع (1) و (2) نجد $\alpha^2 = 49$ ومنه : $\alpha_1 = 7$ أو $\alpha_2 = -7$
بالتعويض في (3) نجد : $\beta_1 = -1$ و $\beta_2 = 1$ ومنه :

$$(\alpha; \beta) \in \{(7; -1), (-7; 1)\}$$

(2) حلول المعادلة : $z^2 + (1 - 3i)z + (-14 + 2i) = 0$

$$\Delta = (1 - 3i)^2 - 4(-14 + 2i) = -8 - 6i + 56 - 8i$$

$$= 48 - 14i = (7 - i)^2 \quad (\text{من السؤال الأول})$$

$$z_1 = \frac{-(1 - 3i) - (7 - i)}{2} = \boxed{-4 + 2i} \quad \text{ومنه :}$$

$$z_2 = \frac{-(1 - 3i) + (7 - i)}{2} = \boxed{3 + i}$$

(3) البرهان على أن المثلث CAB قائم الزاوية في C .

$$Z_{\overline{AC}} = Z_C - Z_A = (-3 - i) - (3 + i) = -6 - 2i$$

$$\overline{AC} \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{ومنه :}$$

$$Z_{\overline{BC}} = Z_C - Z_B = (-3 - i) - (-4 + 2i) = 1 - 3i$$

$$z_2 = \frac{(1 + \sqrt{3}i) - (1 - \sqrt{3}i)}{2} = \boxed{\sqrt{3}i}$$

$$(1 + i)z^2 - 2(1 + 4i)z - (3 - 11i) = 0 \quad (4)$$

$$\Delta' = (1 + 4i)^2 + (1 + i)(3 - 11i) = -1 = i^2$$

ومنه حلول المعادلة هي :

$$z_1 = \frac{(1 + 4i) + i}{(1 + i)} = \frac{1 + 5i}{1 + i} = \frac{(1 + 5i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \boxed{3 + 2i}$$

$$z_2 = \frac{(1 + 4i) - i}{(1 + i)} = \frac{1 + 3i}{1 + i} = \frac{(1 + 3i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \boxed{2 + i}$$

تمرين 20

(1) عين العددين الحقيقيين α و β حيث : $(\alpha + \beta i)^2 = 48 - 14i$

(2) حل في \mathbb{C} المعادلة : $z^2 + (1 - 3i)z + (-14 + 2i) = 0$

نرمز بـ z_1 و z_2 إلى حلول المعادلة حيث : $\text{Re}(z_2) < 0$.

(3) في المستوي المزود بمعلم متعامد ومتجانس نعتبر النقط

C, A, B ذات اللواحق على الترتيب : $-3 - i, z_1, z_2$.

- برهن أن المثلث CAB قائم الزاوية في C .

الحل

(1) تعيين العددين α و β .

$$= \alpha^2 + 2\alpha + 2\alpha i + 2i = \alpha^2 + 2\alpha + 2(\alpha + 1)i$$

$$= [(\alpha + 1) + i]^2$$

ومنه :

$$z_1 = -(\alpha + 2 + 2i) + (\alpha + 1) + i = \boxed{-1 - i}$$

$$z_2 = -(\alpha + 2 + 2i) - (\alpha + 1) - i = \boxed{(-2\alpha - 3) - 3i}$$

(3) نعين α لكي يكون جذري المعادلة z_1 و z_2 متعاكسان .

z_1 و z_2 متعاكسان يعني $z_1 + z_2 = 0$ ومنه :

$$-2\alpha - 4 - 4i = 0 \quad \text{ومنه : } \alpha + 2 + 2i = 0 \quad \text{ومنه}$$

$$\alpha = \boxed{-2 - 2i}$$

تمرين 22

$$(1) \text{ حل في } \mathbb{C} \text{ المعادلة : } z^2 - (1 + \sin \alpha)z + \frac{1}{2}i \sin \alpha = 0$$

حيث : $\alpha \in]0; \pi[$ (2) أكتب الجذرين z' و z'' على الشكل المثلثي .

(3) عين α لكي يكون $z' = z''$

الحل

$$(1) \text{ حل المعادلة : } z^2 - (1 + \sin \alpha)z + \frac{1}{2}i \sin \alpha = 0$$

$$\Delta = (1 + i \sin \alpha)^2 - 4 \times \frac{1}{2}i \sin \alpha$$

$$= (1 - \sin^2 \alpha) + 2i \sin \alpha - 2i \sin \alpha = \cos^2 \alpha$$

$$\text{ومنه : } \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{لدينا : } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = (-6)(+1) + (-2)(-3) = 0$$

إذن $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BC}$ ومنه المثلث CAB قائم الزاوية في C .

تمرين 21

α عدد مركب غير معدوم .

(1) تحقق أن $\alpha^2 + 2(\alpha + 1)i + 2\alpha$ هو مربع لثنائي الحد

بطلب تعيينه .

(2) حل في \mathbb{C} المعادلة :

$$z^2 + 2(\alpha + 2 + 2i)z + 2\alpha(1 + i) + 6i = 0$$

(3) عين α لكي يكون جذري المعادلة متعاكسان .

الحل

(1) التحقق بأن $\alpha^2 + 2(\alpha + 1)i + 2\alpha$ هو مربع لثنائي الحد.

$$[(\alpha + 1) + i]^2 = (\alpha + 1)^2 + 2(\alpha + 1)i - 1$$

$$= \alpha^2 + 2\alpha + 2(\alpha + 1)i$$

إذن $\alpha^2 + 2(\alpha + 1)i + 2\alpha$ هو مربع لثنائي الحد $(\alpha + 1) + i$

(2) حل المعادلة : $z^2 + 2(\alpha + 2 + 2i)z + 2\alpha(1 + i) + 6i = 0$

$$\Delta' = (\alpha + 2 + 2i)^2 - 2\alpha(1 + i) - 6i$$

$$= (\alpha + 2)^2 + 2(\alpha + 2) \times 2i - 4 - 2\alpha - 2\alpha i - 6i$$

$$= (\alpha^2 + 4\alpha + 4) + 4\alpha i + 8i - 4 - 2\alpha - 2\alpha i - 6i$$

$$z' = \frac{(1 + i \sin \alpha) - \cos \alpha}{2} = \frac{(1 - \cos \alpha) + i \sin \alpha}{2}$$

ومنه :

$$= \frac{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 2i \sin \frac{\alpha}{2} \times \cos \frac{\alpha}{2}}{2} =$$

$$z' = \sin \frac{\alpha}{2} \left(\sin \frac{\alpha}{2} + i \cos \frac{\alpha}{2} \right) \quad \text{إذن :}$$

$$z'' = \frac{(1 + i \sin \alpha) + \cos \alpha}{2} = \frac{(1 + \cos \alpha) + i \sin \alpha}{2}$$

$$= \frac{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + 2i \sin \frac{\alpha}{2} \times \cos \frac{\alpha}{2}}{2}$$

$$z'' = \cos \frac{\alpha}{2} \left(\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2} \right) \quad \text{إذن :}$$

(2) كتابة z' و z'' على الشكل المثلثي .

$$z' = \sin \frac{\alpha}{2} \left(\sin \frac{\alpha}{2} + i \cos \frac{\alpha}{2} \right)$$

$$= \sin \frac{\alpha}{2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) \right]$$

$$\text{وبما أن } \sin \frac{\pi}{2} > 0 \text{ فإن } \frac{\alpha}{2} \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[\quad \text{ومنه}$$

$$z' = \sin \frac{\alpha}{2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right]$$

$$\text{وبما أن } \frac{\alpha}{2} \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[\text{ فإن } \cos \frac{\alpha}{2} > 0 \text{ ومنه :}$$

$$z'' = \cos \frac{\alpha}{2} \left(\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2} \right)$$

(3) نعين α بحيث $z' = z''$

$$z' = z'' \text{ يكافئ } |z'| = |z''| \text{ و } \arg(z'') = \arg(z') + 2K\pi$$

$$\left(\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} + 2K\pi \text{ و } \sin \frac{\alpha}{2} = \cos \frac{\alpha}{2} \right) \quad \text{بمالي}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + 2K\pi \quad \text{ومنه :}$$

تمرين 23

α عدد مركب معلوم طويلته r و عمدته θ .

(1) حل في \mathbb{C} المعادلة ذات المجهول z :

$$z^2 - \alpha(\alpha + i)z + i\alpha^3 = 0$$

(2) اكتب z' و z'' جذري المعادلة على الشكل المثلثي .

(3) نفرض $\alpha = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$. أ - احسب z'^{2000} و z''^{2000} .

ب - عين العدد الطبيعي n لكي يكون $(z')^n$ و $(z'')^n$ حقيقيان .

الحل

$$(1) \text{ حل المعادلة : } z^2 - \alpha(\alpha + i)z + i\alpha^3 = 0$$

لدينا : $z' = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$ ، $z'' = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}$ ومنه :

$$(z')^n = \cos \left(n \times \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(n \times \frac{\pi}{2} \right)$$

$$(z'')^n = \cos \left(n \times \frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(n \times \frac{3\pi}{4} \right)$$

يكافئ $z''^n \in \mathbb{R}$ و $z'^n \in \mathbb{R}$

ومنه : $\sin \left(n \frac{\pi}{2} \right) = 0$ و $\sin \left(n \frac{3\pi}{4} \right) = 0$ ومنه :

($K; K'$) $\in \mathbb{N}^2$ حيث $\frac{n\pi}{2} = K\pi$ و $n \frac{3\pi}{4} = K'\pi$

ومنه : ($n = 2K$ و $3n = 4K'$) ومنه :

($n = 2K$ و $n = 4K''$) ومنه n مضاعفات 4.

تمرين 24

لتكن في \mathbb{C} المعادلة : $z^3 - iz^2 + (1-i)z - 2 + 2i = 0$.

(1) بين أن هذه المعادلة تقبل جذرا حقيقيا z_0 يطلب تعيينه.

(2) حل في \mathbb{C} المعادلة. ليكن z_1 ، z_2 الجذرين الآخرين للمعادلة

حيث $|z_1| < |z_2|$.

(3) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس ، نعتبر النقط

A ، B ، C صور الأعداد المركبة z_0 ، z_1 ، z_2 على الترتيب.

- ما هي طبيعة المثلث ABC ؟

$$\Delta = \alpha^2 (\alpha + i)^2 - 4i\alpha^3 = \alpha^2 [(\alpha + i)^2 - 4i\alpha]$$

$$= \alpha^2 (\alpha^2 - 2i\alpha + i^2) = \alpha^2 (\alpha - i)^2$$

$$z' = \frac{\alpha(\alpha + i) + \alpha(\alpha - i)}{2} = \alpha^2$$

$$z'' = \frac{\alpha(\alpha + i) - \alpha(\alpha - i)}{2} = \alpha i$$

(2) كتابة z' و z'' على الشكل المثلثي.

لدينا $\alpha = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ومنه :

، $z' = \alpha^2 = r^2 (\cos 2\theta + i \sin 2\theta)$

$$z'' = \alpha i = r \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) \right]$$

(3) أ - حساب z'^{2000} و z''^{2000} .

$$z'^{2000} = \cos \left(\frac{\pi}{2} \times 2000 \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} \times 2000 \right)$$

$$= \cos(1000\pi) + i \sin(1000\pi) = 1$$

(لأن $\sin K\pi = 0$ و $\cos K\pi = 1$ إذا كان K زوجيا)

$$z''^{2000} = \cos \left(\frac{3\pi}{4} \times 2000 \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{4} \times 2000 \right)$$

$$= \cos(1500\pi) + i \sin(1500\pi) = 1$$

ب - تعيين العدد الطبيعي n لكي يكون $(z')^n$ و $(z'')^n$ حقيقيان.

الحل

(1) تعيين الجذر الحقيقي z_0 للمعادلة :

$$z_0^3 - iz_0^2 + (1-i)z_0 - 2 + 2i = 0 \text{ يعني } z_0^3 - iz_0^2 + (1-i)z_0 - 2 + 2i = 0$$

ومنه : $(z_0^3 + z_0 - 2) + i(-z_0^2 - z_0 + 2) = 0$ ومنه :

$$\begin{cases} z_0^3 + z_0 - 2 = 0 & \dots (1) \\ -z_0^2 - z_0 + 2 = 0 & \dots (2) \end{cases}$$

المعادلة (2) تقبل حلين $z_0' = -2$ ، $z_0'' = 1$ حيث الجذر $z_0'' = 1$ يحقق المعادلة (1) فهو مقبول و الجذر الثاني $z_0' = -2$ لا يحقق المعادلة (1) فهو مرفوض ومنه $z_0 = 1$.

$$(2) \text{ حل المعادلة : } z^3 - iz^2 + (1-i)z - 2 + 2i = 0 \dots *$$

$$z^3 - iz^2 + (1-i)z - 2 + 2i = (z-1)(z^2 + az + c)$$

$$= z^3 + (a-1)z^2 + (c-a)z - c$$

$$\begin{cases} a-1 = -i \\ c-a = 1-i \\ -c = -2+2i \end{cases} \text{ بالمطابقة نجد : } \begin{cases} a = 1-i \\ c = 2-2i \end{cases} \text{ ومنه : } \begin{cases} a = 1-i \\ c = 2-2i \end{cases}$$

$$* \text{ يكافئ } (z-1)[z^2 + (1-i)z + 2-2i] = 0 \text{ ومنه :}$$

$$(z=1) \text{ أو } z^2 + (1-i)z + 2-2i = 0 \dots **$$

** معادلة من الدرجة الثانية مميزها Δ حيث :

$$\Delta = (1-i)^2 - 4(2-2i) = -8 + 6i$$

(إذا كان $\alpha = x + iy$ جذرا تربيعيا للعدد المركب Δ فإن $\alpha^2 = \Delta$).

$$\alpha^2 = \Delta \text{ يكافئ } \begin{cases} x^2 - y^2 = -8 & \dots (1) \\ x^2 + y^2 = 10 & \dots (2) \\ xy = 3 & \dots (3) \end{cases} \text{ بجمع (1) و (2)}$$

نجد $x^2 = 1$ ومنه : $x_1 = 1$ أو $x_2 = -1$

بالتعويض في (3) نجد : $y_1 = 3$ و $y_2 = -3$ ومنه :

$$\alpha_1 = 1 + 3i \text{ و } \alpha_2 = -1 - 3i \text{ ومنه :}$$

$$z_1 = \frac{-(1-i) - (1+3i)}{2} = \boxed{-1-i}$$

$$z_2 = \frac{-(1-i) + (1+3i)}{2} = \boxed{2i}$$

ومنه حلول المعادلة هي : $z_0 = 1$ ، $z_1 = -1-i$ ، $z_2 = 2i$

(3) طبيعة المثلث ABC :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ ومنه : } z_{\overrightarrow{AB}} = z_1 - z_0 = -2 - i$$

$$\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ +2 \end{pmatrix} \text{ ومنه : } z_{\overrightarrow{AC}} = z_2 - z_0 = -1 + 2i$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-2)(-1) + (-1)(+2) = 0$$

إذن $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ ومنه المثلث ABC قائم الزاوية في A و متساوي الساقين.

تمرين 25

ليكن كثير الحدود $P(z)$ المعروف كمل يلي :

$$P(z) = 2z^3 + 2iz^2 + (1 + i\sqrt{3})z + \sqrt{3} + 3i$$

(1) برهن أن المعادلة $P(z) = 0$ تقبل جذرا تخيليا صرفا z_0 يطلب تعيينه.

(2) حل في \mathbb{C} المعادلة $P(z) = 0$ ، نرسم z_1 للجذر الذي جزؤه الحقيقي سالب و z_2 للجذر الثالث .

(3) أ - أكتب z_0 ، z_1 ، z_2 على الشكل المثلثي .

ب - احسب العدد المركب $L = (z_0)^{2000} + (z_1)^{1992} + (z_2)^{1998}$

الحل

(1) تعيين الجذر التخيلي z_0 :

إذا كان $z_0 = \alpha i$ جذرا تخيليا صرفا للمعادلة $P(z) = 0$ فإن :

$$P(\alpha i) = 0 \text{ ومنه :}$$

$$2(\alpha i)^3 + 2i(\alpha i)^2 + (1 + i\sqrt{3})(\alpha i) + \sqrt{3} + 3i = 0$$

$$\text{ومنه } -2\alpha^3 i - 2\alpha^2 i + \alpha i - \alpha\sqrt{3} + \sqrt{3} + 3i = 0 \text{ ومنه :}$$

$$\sqrt{3}(1 - \alpha) + i(-2\alpha^3 - 2\alpha^2 + \alpha + 3) = 0 \text{ يكافئ}$$

$$\begin{cases} \sqrt{3}(1 - \alpha) = 0 \\ -2\alpha^3 - 2\alpha^2 + \alpha + 3 = 0 \end{cases} \text{ ومنه } \alpha = 1 \text{ ومنه } z_0 = i$$

(2) حل المعادلة $P(z) = 0$:

$$P(z) = (z - i)(2z^2 + az + c)$$

$$= 2z^3 + (a - 2i)z^2 + (c - ai)z - ci$$

$$\begin{cases} a = 4i \\ c = -3 + \sqrt{3}i \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} a - 2i = 2i \\ c - ai = 1 + i\sqrt{3} \\ -ci = \sqrt{3} + 3i \end{cases} \text{ بالمطابقة نجد :}$$

$$P(z) = 0 \text{ ومنه } (z - i)(2z^2 + 4iz - 3 + \sqrt{3}i) = 0 \text{ ومنه}$$

$$(2z^2 + 4iz - 3 + \sqrt{3}i = 0 \text{ أو } z = i)$$

$$\Delta' = (2i)^2 - 2(-3 + \sqrt{3}i) = 2 - 2\sqrt{3}i$$

إذا كان $\alpha = x + iy$ جذرا تربيعيا للعدد المركب Δ' فإن $\alpha^2 = \Delta'$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \dots (1) \\ x^2 + y^2 = 4 \dots (2) \\ xy = -\sqrt{3} \dots (3) \end{cases} \text{ بجمع (1) و (2) نجد } \alpha^2 = \Delta' \text{ يكافئ}$$

$$x^2 = 3 \text{ ومنه : } (x_1 = \sqrt{3} \text{ أو } x_2 = -\sqrt{3})$$

$$\text{بالتعويض في (3) نجد : } y_1 = -1 \text{ و } y_2 = 1 \text{ ومنه :}$$

$$\alpha_1 = \sqrt{3} - i \text{ و } \alpha_2 = -\sqrt{3} + i \text{ ومنه :}$$

$$z_1 = \frac{-2i - (\sqrt{3} - i)}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$L = \cos\left(\frac{\pi}{2} \times 2000\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} \times 2000\right) \\ + \cos\left(\frac{7\pi}{6} \times 1992\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{6} \times 1992\right) \\ + 3^{999} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{3} \times 1998\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3} \times 1998\right) \right]$$

$$L = \cos(1000\pi) + i \sin(1000\pi) \\ + \cos(2324\pi) + i \sin(2324\pi) \\ + 3^{999} [\cos(-666\pi) + i \sin(-666\pi)] \\ L = (1+0) + (1+0) + 3^{999}(1+0) = \boxed{2 + 3^{999}}$$

تمرين 26

عين الجذر من الرتبة الرابعة للعدد المركب : $z = 8\sqrt{2}(1+i)$

الحل

$$z = 8\sqrt{2}(1+i) = 16 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \text{ . إذا كان} \\ \alpha = r(\cos \theta + i \sin \theta) \text{ هو جذر من الرتبة الرابعة للعدد } z \text{ فإن :} \\ \alpha^4 = z \text{ يكافئ} \\ r^4 (\cos 4\theta + i \sin 4\theta) = 16 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \text{ يكافئ}$$

$$z_2 = \frac{-2i + (\sqrt{3} - i)}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$$

إذن حلول المعادلة $P(z) = 0$ هي :

$$z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i , \quad z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i , \quad z_0 = i$$

(3) كتابة z_2, z_1, z_0 على الشكل المثلثي .

$$z_0 = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$$

لدينا $|z_1| = 1$ وإذا كانت θ_1 هي عمدة z_1 فإن $\cos \theta_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

و $\sin \theta_1 = -\frac{1}{2}$ ومنه : $\theta_1 \equiv \frac{7\pi}{6} [2\pi]$ و بالتالي :

$$z_1 = \cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6}$$

لدينا $|z_2| = \sqrt{3}$ وإذا كانت θ_2 هي عمدة z_2 فإن $\cos \theta_2 = \frac{1}{2}$

و $\sin \theta_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ومنه : $\theta_2 \equiv \frac{-\pi}{3} [2\pi]$ و التالي :

$$z_2 = \sqrt{3} \left[\cos \left(\frac{-\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{-\pi}{3} \right) \right]$$

ب- حساب العدد $L = (z_0)^{2000} + (z_1)^{1992} + (z_2)^{1998}$

بضرب المعادلة (1) في $-(1-i)$ و المعادلة (2) في $(1+i)$

$$\begin{cases} -2z' + (3+i)z'' = -3+i & \dots (3) \\ 2z' + (1+3i)z'' = -1+3i & \dots (4) \end{cases}$$

نجد:

بجمع المعادلتين (3) و (4) نجد: $4(1+i)z'' = -4(1-i)$

$$z'' = \frac{-1+i}{1+i} = \frac{(-1+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \boxed{i}$$

بتعويض z'' بـ i في المعادلة (1) نجد: $(1+i)z' = 2i$ ومنه:

$$z' = \frac{2i}{1+i} = \frac{2i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2i(1-i)}{2} = \boxed{1+i}$$

$$L = \left(\frac{z'}{\sqrt{2}} \right)^{2000} + (z'')^{2002} \quad \text{(2) حساب العدد}$$

$$z' = 1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$z'' = i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$$

$$L = \cos \left(\frac{\pi}{4} \times 2000 \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} \times 2000 \right) +$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} \times 2002 \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} \times 2002 \right)$$

$$(r^4 = 16 \text{ و } 4\theta = \frac{\pi}{4} + 2K\pi \text{ ومنه : } r = 2 \text{ و } \theta = \frac{\pi}{16} + K\frac{\pi}{2} \text{ مع } K \in \{0,1,2,3\} \text{ ومنه الجذور من الرتبة 4})$$

$$\alpha_0 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{16} + i \sin \frac{\pi}{16} \right) \text{ هي :}$$

$$\alpha_1 = 2 \left(\cos \frac{9\pi}{16} + i \sin \frac{9\pi}{16} \right)$$

$$\alpha_2 = 2 \left(\cos \frac{17\pi}{16} + i \sin \frac{17\pi}{16} \right)$$

$$\alpha_3 = 2 \left(\cos \frac{25\pi}{16} + i \sin \frac{25\pi}{16} \right)$$

$$\alpha_4 = 2 \left(\cos \frac{33\pi}{16} + i \sin \frac{33\pi}{16} \right)$$

تمرين 27

$$\begin{cases} (1+i)z' - (1+2i)z'' = 2+i \\ (1-i)z' + (2+i)z'' = 1+2i \end{cases} \quad \text{(1) حل في } \mathbb{C}^2 \text{ الجملة :}$$

$$L = \left(\frac{z'}{\sqrt{2}} \right)^{2000} + (z'')^{2002} \quad \text{(2) احسب}$$

الحل

$$\begin{cases} (1+i)z' - (1+2i)z'' = 2+i & \dots (1) \\ (1-i)z' + (2+i)z'' = 1+2i & \dots (2) \end{cases} \quad \text{(1) حل الجملة :}$$

$$L = \cos 500\pi + i \sin 500\pi + \cos 1001\pi + i \sin 1001\pi \\ = (1+0) + (-1+0) = 0$$

تمرين 28

(1) أ - اكتب $z_0 = 1 + i\sqrt{3}$ على الشكل المثلثي .

ب - عين العدد الطبيعي n لكي يكون z_0^n حقيقيا .

(2) ليكن z_1 العدد المركب المعروف كما يلي :

$$z_0 \times z_1 = 2 \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right)$$

- اكتب z_1 على الشكل المثلثي ثم على الشكل الجبري .

(3) استنتج قيمة $\cos \frac{7\pi}{12}$ و $\sin \frac{7\pi}{12}$.

الحل

(1) كتابة z_0 على الشكل المثلثي و تعيين n ليكون z_0^n حقيقيا .

$$|z_0| = 2 \text{ إذا كان } \theta \text{ هي عمدة } z_0 \text{ فإن } \cos \theta = \frac{1}{2} \text{ و } \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{ومنه } \theta \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \text{ ومنه : } z_0 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\text{إذن } z_0^n = 2^n \left(\cos n \frac{\pi}{3} + i \sin n \frac{\pi}{3} \right)$$

$$z_0^n \in \mathbb{R} \text{ معناه تخيلي } z_0^n \text{ معدوم ومنه : } \sin n \frac{\pi}{3} = 0$$

$$\text{ومنه : } n \frac{\pi}{3} = K\pi \text{ (} K \in \mathbb{N} \text{) ومنه : } n = 3K$$

(2) كتابة z_1 على الشكل المثلثي ثم على الشكل الجبري .

$$\text{لدينا : } z_0 \times z_1 = 2 \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right) \text{ ومنه :}$$

$$z_1 = \frac{2 \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right)}{z_0} \text{ ومنه :}$$

$$z_1 = \frac{2 \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right)}{2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)} \text{ ومنه :}$$

$$z_1 = \cos \left(\frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{3} \right) = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\text{ومنه : } z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$$

$$(3) \text{ استنتج قيمة } \cos \frac{7\pi}{12} \text{ و } \sin \frac{7\pi}{12}$$

$$\text{لدينا : } z_0 \times z_1 = 2 \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right) \text{ ومنه :}$$

$$(1 + i\sqrt{3}) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i \right) = 2 \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right)$$

$$\beta^3 = L \text{ يكافئ}$$

$$r^3 (\cos 3\theta + i \sin 3\theta) = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$$

$$r^3 = 2\sqrt{2} \text{ و } \theta = \frac{\pi}{4} + \frac{2K\pi}{3} \text{ حيث } K \in \{0, 1, 2\} \text{ ومنه :}$$

$$r = \sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{8}} = \sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$$

$$\text{و } \theta = \frac{3\pi + 8K\pi}{12} \text{ حيث } K \in \{0, 1, 2\} \text{ ومنه :}$$

$$\beta_0 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\beta_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right)$$

$$\beta_2 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12} \right)$$

$$(2) \text{ أ - حساب } (1+i)^3$$

$$(1+i)^3 = (1+i)(1+i)^2 = (1+i) \times 2i = -2 + 2i$$

ب - تعيين الجذور التكعيبية للعدد 1 على الشكل الجبري.

$$1 = \cos 0 + i \sin 0 \text{ ، } \alpha = r(\cos \theta + i \sin \theta) \text{ جذرا}$$

تكعيبيا للعدد 1 .

$$\alpha^3 = 1 \text{ ومنه } r^3 (\cos 3\theta + i \sin 3\theta) = \cos 0 + i \sin 0$$

$$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}i = 2 \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right) \text{ ومنه :}$$

$$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}i = \cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \text{ ومنه :}$$

$$\cos \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \text{ و } \sin \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

تمرين 29

(1) احسب الجذور التكعيبية للعدد $L = -2 + 2i$

(2) أ - احسب $(1+i)^3$. ب - عين الجذور التكعيبية للعدد 1

على الشكل الجبري.

(3) حل في \mathbb{C} المعادلة : $z^3 + 2(1-i) = 0$.

(4) استنتج قيمة $\cos \frac{11\pi}{12}$ و $\sin \frac{11\pi}{12}$.

الحل

(1) حساب الجذور التكعيبية للعدد $L = -2 + 2i$

$$L = -2 + 2i = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$$

إذا كان $\beta = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ جذرا تكعيبيا للعدد L فإن

$$\beta^3 = L$$

يكافئ ($r^3 = 1$ و $\theta = \frac{2K\pi}{3}$ حيث $K \in \{0,1,2\}$) ومنه :

$$\alpha_0 = 1$$

$$\alpha_1 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\alpha_2 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} =$$

$$= \cos \left(\pi + \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\pi + \frac{\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

إذن الجذور التكعيبية للعدد 1 هي :

$$\alpha_2 = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} , \alpha_1 = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} , \alpha_0 = 1$$

(3) حل المعادلة $z^3 + 2(1-i) = 0$

$$z^3 + 2(1-i) = 0 \text{ ومنه : } z^3 = -2 + 2i = (1+i)^3 \text{ ومنه}$$

$$\text{ومنه : } \left(\frac{z}{1+i} \right)^3 = 1 \text{ إذن } \frac{z}{1+i} \text{ جذرا تكعيبيا للعدد 1. ومنه :}$$

$$\frac{z}{1+i} = 1 \text{ أو } \frac{z}{1+i} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ أو } \frac{z}{1+i} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{z}{1+i} = 1 \text{ ومنه : } z = 1+i$$

$$\frac{z}{1+i} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ومنه :}$$

$$z = (1+i) \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) i$$

$$\frac{z}{1+i} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ومنه :}$$

$$z = (1+i) \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) i$$

(4) استنتاج قيمة $\cos \frac{11\pi}{12}$ و $\sin \frac{11\pi}{12}$

لدينا $z^3 = -2 + 2i = L$ ومنه z جذرا تكعيبيا للعدد L ، إذن حلول هذه المعادلة z_2, z_1, z_0 هي الجذور التكعيبية للعدد L

$$\text{لدينا } z_0 = 1+i , z_1 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) i , z_2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) i$$

$$z_2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) i$$

ونعلم أن الجذور التكعيبية للعدد L على الشكل المثلثي هي :

$$\beta_0 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\beta_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right)$$

$$\beta_2 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12} \right)$$

$$= \alpha^2(-8+6i) + 8\alpha^2 - 8\alpha^2 i$$

$$= -2\alpha^2 i = \alpha^2(-2i) = \alpha^2(1-i)^2$$

$$z_1 = \frac{\alpha(1+3i) + \alpha(1-i)}{2} = \alpha + \alpha i = \alpha(1+i) : \text{ومنه}$$

$$z_2 = \frac{\alpha(1+3i) - \alpha(1-i)}{2} = 2\alpha i$$

(2) أ - كتابة z_1 و z_2 على الشكل المثلثي .

$$|z_1| = |\alpha(1+i)| = |\alpha||1+i| = r\sqrt{2}$$

$$\arg(z_1) \equiv \arg[\alpha(1+i)] \equiv \arg(\alpha) + \arg(1+i)$$

$$\equiv \left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)[2\pi]$$

$$z_1 = r\sqrt{2} \left[\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \right] : \text{ومنه}$$

$$|z_2| = |2\alpha i| = |\alpha||2i| = 2r$$

$$\arg(z_2) \equiv \arg[2\alpha i] \equiv \arg(\alpha) + \arg(2i)$$

$$\equiv \left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)[2\pi]$$

$$z_2 = 2r \left[\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \right] : \text{ومنه}$$

ب - تعيين r و θ بحيث يكون $z_1 = z_2^2$.

نعلم أن $\cos \frac{11\pi}{12} < 0$ و $\sin \frac{11\pi}{12} > 0$ ومنه :

$$\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right)$$

$$\sin \frac{11\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} , \quad \cos \frac{11\pi}{12} = \frac{-\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} : \text{ومنه}$$

$$\sin \frac{11\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} , \quad \cos \frac{11\pi}{12} = \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} : \text{إذن}$$

تمرين 30

α عدد مركب طويته r و عمدته $\theta \in]-\pi; +\pi[$

(1) حل في \mathbb{C} المعادلة : $z^2 - \alpha(1+3i) - 2\alpha^2(1-i) = 0$

نرمز بـ z_1 و z_2 لحلي المعادلة حيث $|z_2| > |z_1|$

(2) أ - أكتب z_1 و z_2 على الشكل المثلثي .

ب - حدد r و θ بحيث يكون $z_1 = z_2^2$.

(3) نفرض أن $\theta = \frac{\pi}{4}$ و $r = \sqrt{2}$. أ - عين العدد الطبيعي n لكي

يكون z_1^n تخيليا صرفا . ب - احسب z_2^{2000} .

الحل

(1) حل المعادلة : $z^2 - \alpha(1+3i) - 2\alpha^2(1-i) = 0$

$$\Delta = \alpha^2(1+3i)^2 + 8\alpha^2(1-i)$$

يكافئ $(z_1 = z_2^2 \text{ و } |z_2^2| = |z_1| \text{ و } \arg(z_2^2) = \arg(z_1) + 2K\pi)$
 يكافئ $(2\arg(z_2) = \arg(z_1) + 2K\pi \text{ و } 4r^2 = r\sqrt{2})$ يكافئ

$$2\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) + 2K\pi \text{ و } r = \frac{\sqrt{2}}{4} \text{ ومنه :}$$

$$\left(\theta = -\frac{3\pi}{4} + 2K\pi \text{ و } r = \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

وبما أن $\theta \in]-\pi, +\pi[$ فإن $r = \frac{\sqrt{2}}{4}$ و $\theta = -\frac{3\pi}{4}$.

(3) أ - تعيين العدد الطبيعي n لكي يكون z_1^n تخيليا صرفا.

إذا كان $r = \sqrt{2}$ و $\theta = \frac{\pi}{4}$ فإن $z_1 = 2\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)$

$$\text{و } z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$\text{ولدينا : } z_1^n = 2^n \left(\cos \frac{n\pi}{2} + i \sin \frac{n\pi}{2}\right)$$

z_1^n تخيليا صرفا يعني حقيقي z_1^n معدوم ومنه : $\cos \frac{n\pi}{2} = 0$

$$\text{ومنه : } \frac{n\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + K\pi = \frac{\pi}{2}(2K+1)$$

$$. n = 2k + 1 (K \in \mathbb{N})$$

إن مجموعة الأعداد الطبيعية n لكي يكون z_1^n تخيليا صرفا هي :

$$\text{مجموعة الأعداد الفردية } n = 2k + 1 (K \in \mathbb{N}).$$

ب - حساب z_2^{2000} .

$$z_2^{2000} = (2\sqrt{2})^{2000} \left(\cos 2000 \times \frac{3\pi}{4} + i \sin 2000 \times \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$= (\sqrt{8})^{2000} (\cos 1500\pi + i \sin 1500\pi)$$

$$= 8^{1000} \times (1 + 0) = \boxed{8^{1000}}$$

تمرين 31

(1) عين العدد الحقيقي α حيث : $(2 + \alpha i)^2 = 3 + 4i$.

(2) حل في \mathbb{C} المعادلة : $z^2 - 2(1 - 2i)z + 3(3 + 4i) = 0$

نرمز لحلي المعادلة بـ z_1 و z_2 حيث $\operatorname{Re}(z_1) < 0$.

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس ، نعتبر النقاط

A ، B ، C ذات اللواحق على الترتيب z_1 ، z_2 ، $5 - 5i$.

(3) أ - برهن أن المثلث ABC قائم الزاوية في B .

ب - عين لاحقة D لكي يكون الرباعي $ABCD$ مستطيلا.

(4) ليكن العدد المركب $L = \frac{z - z_2}{z - z_1}$. عين مجموعة النقاط

$M(z)$ لكي يكون L تخيليا صرفا.

الحل

(1) تعيين العدد الحقيقي α حيث : $(2 + \alpha i)^2 = 3 + 4i$.

$(2 + \alpha i)^2 = 3 + 4i$ يكافئ $(4 - \alpha^2) + 4\alpha i = 3 + 4i$ ومنه :

$$(4 - \alpha^2 = 3 \text{ و } 4\alpha = 4) \text{ ومنه : } \alpha = 1.$$

$$L = \frac{z - z_2}{z - z_1} = \frac{(x + iy) - (3 - 6i)}{(x + iy) - (-1 + 2i)} = \frac{(x - 3) + i(y + 6)}{(x + 1) + i(y - 2)}$$

$$= \frac{[(x - 3) + i(y + 6)][(x + 1) - i(y - 2)]}{[(x + 1) + i(y - 2)][(x + 1) - i(y - 2)]}$$

$$= \frac{x^2 + y^2 - 2x + 4y - 15}{(x + 1)^2 + (y - 2)^2} + i \frac{8x + 4y}{(x + 1)^2 + (y - 2)^2}$$

L تخيليا صرفا معناه حقيقي $L = 0$ ومنه :
 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 15 = 0$ و $(x; y) \neq (-1; 2)$ ومنه :
 $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 - 1 - 4 - 15 = 0$
 $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 20$: ومنه $(x; y) \neq (-1; 2)$
و $(x; y) \neq (-1; 2)$. إذن مجموعة النقط M لكي يكون
 L تخيليا صرفا هي الدائرة التي مركزها $\omega(1; -2)$ و نصف
قطرها $2\sqrt{5}$ باستثناء النقطة $(-1; 2)$.

تمرين 32

(1) حل في \mathbb{C} المعادلة : $z^2 - (2 - 7i)z - 13(1 + i) = 0$
نرمز لحلي المعادلة بـ z_1 و z_2 بحيث يكون الجزء الحقيقي لـ z_1
موجبا تماما .
(2) المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس .
و A و B صورتا العددين المركبين z_1 و z_2 على الترتيب .

(2) حل المعادلة $z^2 - 2(1 - 2i)z + 3(3 + 4i) = 0$

$$\Delta' = (1 - 2i)^2 - 3(3 + 4i) = -12 - 16i = -4(3 + 4i)$$

$$= 4i^2(2 + i)^2 = [2i(2 + i)]^2 = (-2 + 4i)^2$$

$$z_1 = 1 - 2i + (-2 + 4i) = -1 + 2i \quad \text{ومنه :}$$

$$z_2 = 1 - 2i - (-2 + 4i) = 3 - 6i$$

(3) أ- البرهان بأن المثلث ABC قائم الزاوية في B .

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix} \quad \text{ومنه : } z_{\overrightarrow{AB}} = z_2 - z_1 = 4 - 8i$$

$$\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{ومنه : } z_{\overrightarrow{BC}} = (5 - 5i) - z_2 = 2 + i$$

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC} : \text{ ومنه } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 4(2) + (-8)(1) = 0$$

فالمثلث ABC قائم الزاوية في B .

ب - تعيين لاحقة النقطة D .

$ABCD$ مستطيل معناه : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ يكافئ

$$z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{DC}} \quad \text{يكافئ} \quad z_2 - z_1 = z_C - z_D \quad \text{ومنه :}$$

$$z_D = z_C - z_2 + z_1$$

$$z_D = (5 - 5i) - (3 - 6i) + (-1 + 2i) = 1 + 3i$$

(4) تعيين مجموعة النقط $M(z)$.

أ- عين المركز ω للتشابه S الذي نسبته 2 و زاويته $\frac{3\pi}{2}$ و الذي

يحول النقطة A إلى النقطة B .

ب - عين لاحقة C صورة النقطة B بالتشابه S .

(3) أ- عين لاحقة النقطة D مرجع الجملة

$$\{(A;1), (B;-1), (C;1)\}$$

ب - ما طبيعة الرباعي $ABCD$ ؟

ج- عين المجموعة (γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث :

$$MA^2 - MB^2 + MC^2 = K \quad (K \in \mathbb{R})$$

الحل

$$(1) \text{ حل المعادلة : } z^2 - (2-7i)z - 13(1+i) = 0$$

$$\Delta = (2-7i)^2 + 52(1+i) = 7 + 24i$$

إذا كان $\alpha = x + iy$ جذرا تربيعيا للعدد المركب Δ فإن $\alpha^2 = \Delta$.

$$\alpha^2 = \Delta \text{ يكافئ } \begin{cases} x^2 - y^2 = 7 \dots (1) \\ x^2 + y^2 = 25 \dots (2) \\ xy = 12 \dots (3) \end{cases} \text{ بجمع (1) و (2) نجد:}$$

$$x^2 = 16 \text{ ومنه : } (x_1 = 4 \text{ أو } x_2 = -4)$$

$$\text{بالتعويض في (3) نجد : } y_1 = 3, y_2 = -3$$

$$\text{ومنه : } \alpha_1 = 4 + 3i, \alpha_2 = -4 - 3i$$

$$\text{ومنه حلول المعادلة هي : } z_1 = \frac{(2-7i) + (4+3i)}{2} = 3 - 2i$$

$$z_2 = \frac{(2-7i) - (4+3i)}{2} = -1 - 5i$$

(2) أ - تعيين مركز التشابه S :

العبرة المركبة للتشابه S هي $z' = \alpha z + \beta$ حيث

$$(\alpha; \beta) \in \mathbb{C}^2 \text{ و } |\alpha| \neq 1$$

$$\text{لدينا : } \alpha = 2 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) = -2i$$

و لدينا : $S(A) = B$ ومنه $z_2 = \alpha z_1 + \beta$ ومنه :

$$\beta = z_2 - \alpha z_1$$

$$\text{إذن } \beta = (-1-5i) + 2i(3-2i) = 3+i \text{ فيكون}$$

: $z' = -2iz + 3 + i$. و مركز التشابه S هي النقطة ω ذات

$$\text{اللاحقة } \frac{3+i}{1+2i} = \frac{(3+i)(1-2i)}{5} = 1-i$$

ب - تعيين لاحقة النقطة C .

لدينا $S(B) = C$ ومنه :

$$z_C = -2iz_2 + 3 + i$$

$$= -2i(-1-5i) + 3 + i = -7 + 3i$$

(3) أ - تعيين لاحقة النقطة D .

$$z_D = \frac{z_1 - z_2 + z_C}{1-1+1} = (3-2i) - (-1-5i) - 7 + 3i$$

$$= -3 + 6i$$

ب - طبيعة الرباعي $ABCD$.

$$z_{\overline{DC}} = z_C - z_D = -4 - 3i, z_{\overline{AB}} = z_2 - z_1 = -4 - 3i$$

فيكون $\overline{AB} = \overline{DC}$

($AB = DC$ و $(AB) \parallel (DC)$) فالرباعي $ABCD$ فيه ضلعان متقابلان متقايسان و حاملهما متوازيان فهو متوازي الأضلاع و بما أن $\overline{AB} \perp \overline{DC}$ فهو مستطيل .
ج - تعيين المجموعة (γ) .

$$MA^2 - MB^2 + MC^2 = K \text{ ومنه :}$$

$$MD^2 + DA^2 - DB^2 + DC^2 = K$$

$$DA^2 = |z_1 - z_D|^2 = |6 - 8i|^2 = 100$$

$$DB^2 = |z_2 - z_D|^2 = |2 - 11i|^2 = 125$$

$$DC^2 = |z_C - z_D|^2 = |-4 - 3i|^2 = 25$$

$$D^2 + DA^2 - DB^2 + DC^2 = MD^2 + 100 - 125 + 25 = K$$

$$\text{ومنه : } MD^2 = K$$

إذا كان $K > 0$ فإن المجموعة (γ) هي دائرة مركزها D و نصف

$$\text{قطرها } R = \sqrt{K}$$

إذا كان $K < 0$ فإن المجموعة (γ) هي مجموعة خالية.

إذا كان $K = 0$ فإن المجموعة (γ) هي النقطة D .

تمرين 33

نعتبر في \mathbb{C} كثير الحدود :

$$P(z) = z^3 - 4(1+2i)z^2 + (-18+20i)z + 3(8+4i)$$

(1) برهن أن المعادلة $P(z) = 0$ تقبل حلا تخيليا صرفا z_0 يطلب تعيينه .

(2) حل في \mathbb{C} المعادلة $P(z) = 0$. نرسم لحلول المعادلة ب :

$$z_0, z_1, z_2 \text{ حيث } |z_1| < |z_2|$$

في المستوي المزود بمعلم متعامد ومتجانس نعتبر النقاط

A, B, C ذات اللواحق على الترتيب z_0, z_1, z_2 .

(3) أ - عين العدد الحقيقي λ لكي تقبل الجملة $\{(A; \lambda), (B; -1), (C; 1)\}$ النقطة D ذات اللاحقة

$$-1 + 2i \text{ مرجعا .}$$

ب - عين مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي التي تحقق :

$$-2MA^2 - MB^2 + MC^2 = K \quad (K \in \mathbb{R})$$

الحل

(1) البرهان على أن المعادلة $P(z) = 0$ تقبل حلا تخيليا صرفا z_0 .

إذا كان : $z_0 = iy$ فإن : $P(iy) = 0$ ومنه :

$$-iy^3 + 4y^2(1+2i) + iy(-18+20i) + 3(8+4i) = 0$$

$$\begin{cases} -y^3 + 8y^2 - 18y + 12 = 0 \dots (1) \\ 4y^2 - 20y + 24 = 0 \dots (2) \end{cases} \text{ يكافئ}$$

المعادلة (2) تقبل حلين $y_1 = 2$ أو $y_2 = 3$ حيث y_1 يحقق

المعادلة (1) فهو الحل المقبول أما y_2 فهو مرفوض لأنه لا يحقق

المعادلة (1) ومنه $z_0 = 2i$.

(2) حل المعادلة $P(z) = 0$.

$$\begin{aligned} P(z) &= (z - 2i)(z^2 + az + c) \\ &= z^3 + (a - 2i)z^2 + (c - 2ai)z - 2ci \\ &\begin{cases} a - 2i = -4(1 + 2i) \\ c - 2ai = -18 + 20i : \text{بالمطابقة نجد} \\ -2ci = 3(8 + 4i) \end{cases} \\ &\begin{cases} a = -4 - 6i \\ c = -6 + 12i \end{cases} \text{ومنه:} \end{aligned}$$

$P(z) = 0$ يكافئ

$$(z - 2i)[z^2 - (4 + 6i)z - 6 + 12i] = 0$$

ومنه : $z_0 = 2i$ أو $z^2 - (4 + 6i)z - 6 + 12i = 0$

$$\Delta' = (2 + 3i)^2 - (-6 + 12i) = (-5 + 12i) + 6 - 12i = 1$$

ومنه : $z_1 = (2 + 3i) - 1 = 1 + 3i$

وبالتالي حلول $z_2 = (2 + 3i) + 1 = 3 + 3i$

المعادلة $P(z) = 0$ هي:

$$z_2 = 3 + 3i, z_1 = 1 + 3i, z_0 = 2i$$

(3) أ - تعيين العدد الحقيقي λ .

لكي تقبل الجملة $\{(A; \lambda), (B; -1), (C; 1)\}$ مرجعا يجب أن

يكون $\lambda + (-1) + (+1) \neq 0$ ومنه: $\lambda \neq 0$.

تكون النقطة $D(1 - 2i)$ مرجعا لهذه الجملة إذا كان

$$z_D = \frac{\lambda z_0 - z_1 + z_2}{\lambda} \text{ ومنه:}$$

$$-1 + 2i = \frac{2\lambda i - (1 + 3i) + 3 + 3i}{\lambda} \text{ ومنه:}$$

$$\lambda(-1 + 2i) = 2\lambda i + 2 \text{ ومنه } \lambda = -2.$$

ب- تعيين مجموعة النقط $M(z)$

$$-2MA^2 - MB^2 + MC^2 = K \text{ ومنه:}$$

$$-2MD^2 - 2DA^2 - DB^2 + DC^2 = K$$

$$DB^2 = |z_1 - z_D|^2 = |2 + i|^2 = 5, DA^2 = |z_0 - z_D|^2 = 1$$

$$DC^2 = |z_2 - z_D|^2 = |4 + i|^2 = 17$$

$$-2MD^2 - 2 - 5 + 17 = K \text{ ومنه:}$$

$$MD^2 = \frac{10 - K}{2}$$

إذا كان $K < 10$ فإن مجموعة النقط M هي دائرة مركزها D

$$\text{ونصف قطرها } R = \sqrt{\frac{10 - K}{2}}.$$

إذا كان $K = 10$ فإن مجموعة النقط M هي النقطة D .

إذا كان $K > 10$ فإن مجموعة النقط M هي مجموعة خالية.

تمرين 34

نعتبر الأعداد المركبة : $z_1 = 1 + i$ ، $z_2 = 2(-1 + i)$ ،

$$z_3 = -3 - i$$

(1) أ - احسب z_1^{2002} .

ب - عين العدد الطبيعي n لكي يكون $z_2^n \in \mathbb{R}_+^*$.

(2) نعتبر في المستوى المزود بمعلم متعامد و متجانس النقط

A ، B ، C ذات اللواحق على الترتيب z_1 ، z_2 ، z_3 .

أ - λ عدد حقيقي ، عين E مجموعة قيم λ لكي تقبل الجملة

$\{(A; \lambda), (B; 1), (C; 1)\}$ النقطة G_λ مرجعا .

ب - عين مجموعة النقط G_λ عندما $\lambda \in E$.

(3) نعتبر الدوران R الذي يحول النقطة A إلى B والنقطة

B إلى C .

أ - عين العناصر المميزة للدوران R .

ب - عين لاحقة النقطة A' صورة النقطة A بالدوران R .

الحل

(1) حساب z_1^{2002} .

$$z_1 = 1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \text{ ومنه :}$$

$$\begin{aligned} z_1^{2002} &= 2^{1001} \left[\cos \left(2002 \times \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(2002 \times \frac{\pi}{4} \right) \right] \\ &= 2^{1001} \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} + 500\pi \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} + 500\pi \right) \right] \end{aligned}$$

$$= 2^{1001} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 2^{1001} i$$

ب - تعيين العدد الطبيعي n لكي يكون $z_2^n \in \mathbb{R}_+^*$.

$$z_2 = 2(-1 + i) = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) \text{ ومنه :}$$

$$z_2^n = (2\sqrt{2})^n \left(\cos \frac{3\pi}{4} \times n + i \sin \frac{3\pi}{4} \times n \right)$$

$$z_2^n \in \mathbb{R}_+^* \text{ يكافئ } \begin{cases} \sin \frac{3\pi \times n}{4} = 0 \\ \cos \frac{3\pi \times n}{4} > 0 \end{cases} \text{ يكافئ}$$

$$\frac{3\pi \times n}{4} = 2K\pi \text{ ومنه } 3n = 8K \text{ حيث } K \in \mathbb{N}$$

(حسب نظرية غوس فإن 8 تقسم n (أي n من مضاعفات 8))

(2) أ - تعيين مجموعة قيم λ .

لكي تقبل الجملة $\{(A; \lambda), (B; 1), (C; 1)\}$ مرجعا يجب أن يكون

$$\lambda + 1 + 1 \neq 0 \text{ أي } \lambda \neq -2 \text{ ومنه } E = \mathbb{R} - \{-2\} .$$

ب - تعيين مجموعة النقط G_λ عندما $\lambda \in E$.

$$z_{G_\lambda} = \frac{\lambda z_1 + z_2 + z_3}{\lambda + 2} \text{ فإن } \lambda \in E \text{ حيث :}$$

$$z_{G_\lambda} = \frac{\lambda-5}{\lambda+2} + i \frac{\lambda+1}{\lambda+2} = \left(1 - \frac{7}{\lambda+2}\right) + i \left(1 - \frac{1}{\lambda+2}\right)$$

ومنه : $G_\lambda \left(1 - \frac{7}{\lambda+2}; 1 - \frac{1}{\lambda+2}\right)$ فيكون

$$\begin{cases} x_G = 1 - \frac{7}{\lambda+2} \dots (1) \\ y_G = 1 - \frac{1}{\lambda+2} \dots (2) \end{cases}$$

بجمع المعادلتين نجد : $x_G - 7y_G - 6 = 0$.

فتكون مجموعة النقط G_λ عندما $\lambda \in E$ هي المستقيم (D) ذو

$$x - 7y - 6 = 0$$

(3) أ - تعيين العناصر المميزة للدوران R .

نعلم أن عبارة الدوران R هي من الشكل $z' = \alpha z + \beta$ حيث :

$$(\alpha; \beta) \in \mathbb{C}^2 \text{ و } |\alpha| = 1.$$

$$\text{لدينا : } \begin{cases} R(A) = B \\ R(B) = C \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} z_2 = \alpha z_1 + \beta \\ z_3 = \alpha z_2 + \beta \end{cases} \text{ ومنه :}$$

$$\alpha = \frac{z_3 - z_2}{z_2 - z_1} = \frac{-1-3i}{-3+i} \text{ ومنه : } z_3 - z_2 = \alpha(z_2 - z_1)$$

$$\text{ومنه : } \alpha = \frac{(-1-3i)(-3-i)}{10} = i$$

$$\text{لدينا : } z_2 = \alpha z_1 + \beta \text{ ومنه } \beta = z_2 - \alpha z_1 = -1+i$$

إذن عبارة الدوران R هي $z' = iz - 1 + i$.

العناصر المميزة للدوران R هي الزاوية : $\arg(i) = \frac{\pi}{2}$

$$\text{و المركز النقطة ذات اللاحقة } -1 \text{ و } \frac{-1+i}{1-i} = -\frac{1-i}{1-i} = -1$$

ب - تعيين لاحقة النقطة A' صورة النقطة A .

لدينا : $R(A) = A'$ ومنه :

$$z_{A'} = iz_A - 1 + i = i(1+i) - 1 + i = -2 + 2i$$

تمارين 35

نعتبر الأعداد المركبة : $-4i$ ، -2 ، $-2-2i$.

(1) رتب هذه الأعداد المركبة لكي تشكل 3 حدود متتابعة لمتتالية هندسية أساسها $(1+i)$.

(2) نعتبر في المجموعة \mathbb{C} المتتالية (z_n) المعرفة بحددها الأول

$$z_0 = -1 - i \text{ و أساسها } (1+i)$$

أ - احسب z_1 ، z_2 ، z_3 . ب - احسب بدلالة n الحد العام z_n .

ج - أكتب z_n على الشكل المثلثي ثم استنتج مجموعة قيم العدد

الطبيعي n التي من أجلها $z_n \in \mathbb{R}$.

(3) في المستوي المركب المزود بمعلم متعامد ومتجانس نعتبر

التحويل S الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ حيث

$$z' = (-1-i)z + (4+2i):$$

أ - ما طبيعة التحويل S وما هي عناصره المميزة ؟

ب- برهن أن التحويل $T = S \circ S \circ S \circ S$ هو تحاكي يطلب تعيين عناصره.

الحل

(1) ترتيب الأعداد المركبة -2 ، $-4i$ ، $-2-2i$ لكي تشكل ثلاثة حدود متتالية لمتتالية هندسية.

$$\text{لدينا : } (-2-2i)^2 = 8i \text{ و } (-2)(-4i) = 8i$$

و بما أن $(-2-2i)^2 = (-2)(-4i)$ (الوسط الهندسي) فإن

الحد $-2-2i$ هو الحد الوسط ، و يكون الترتيب كما يلي :
 -2 ، $-4i$ ، $-2-2i$ ، أو -2 ، $-2-2i$ ، $-4i$. ويكون أساس

المتتالية في الترتيب الأول : $\frac{-2-2i}{-2} = 1+i$ وهو المطلوب .

إذن ترتيب الحدود هو : -2 ، $-2-2i$ ، $-4i$.

(2) أ - حساب z_1 ، z_2 ، z_3 :

$$z_1 = (1+i)z_0 = (1+i)(-1-i) = -2i$$

$$z_2 = (1+i)z_1 = (1+i)(-2i) = 2-2i$$

$$z_3 = (1+i)z_2 = (1+i)(2-2i) = 4$$

ب - حساب z_n بدلالة n :

$$z_n = z_0(1+i)^n = (-1-i)(1+i)^n$$

ج - كتابة z_n على الشكل المثلثي ثم استنتاج مجموعة قيم العدد الطبيعي n .

$$|z_n| = |-1-i| \times |1+i|^n = \sqrt{2} \times (\sqrt{2})^n = (\sqrt{2})^{n+1}$$

$$\arg(z_n) \equiv \arg(-1-i) + \arg(1+i)^n$$

$$\equiv \frac{5\pi}{4} + n \times \arg(1+i) \equiv \frac{5\pi}{4} + \frac{n\pi}{4} \equiv \frac{\pi}{4}(5+n)[2\pi]$$

$$\text{ومنه : } z_n = \sqrt{2^{n+1}} \left[\cos \frac{(5+n)\pi}{4} + i \sin \frac{(5+n)\pi}{4} \right]$$

$$z_n \in \mathbb{R} \text{ يكافئ } \sin \frac{\pi}{4}(5+n) = 0 \text{ ومنه : } \frac{\pi}{4}(5+n) = K\pi$$

ومنه : $5+n = 4K$ ومنه $n = 4K - 5$ حيث :

$K \in \mathbb{N}$ و $K \geq 2$.

(3) أ - طبيعة التحويل S و عناصره المميزة .

لدينا $z' = (-1-i)z + (4+2i)$ و بما أن $|-1-i| = \sqrt{2}$

و $\arg(-1-i) \equiv \frac{5\pi}{4}[2\pi]$ فالتحويل S هو تشابه نسبته $\sqrt{2}$

و زاويته $\frac{5\pi}{4}$ ومركزه النقطة ω ذات اللاحقة

$$\frac{4+2i}{1-(-1-i)} = \frac{4+2i}{2+i} = 2 \text{ ومنه : } \omega(2;0)$$

ب- البرهان على أن $T = S \circ S \circ S \circ S$ هو تحاكي يطلب تعيين عناصره.

نعلم أن تركيب n مرة التشابه S الذي مركزه ω ونسبته K و زاويته θ هو تشابه مركزه ω ونسبته K^n و زاويته $n \times \theta$.
 فيكون $T = S \circ S \circ S \circ S$ هو تشابه مركزه ω ونسبته

$(\sqrt{2})^4$ و زاويته $5\pi = 4 \times \frac{5\pi}{4}$. والتشابه الذي زاويته $K\pi$

يعتبر تحاكي. فالتحويل T هو تحاكي مركزه ω ونسبته $4 = (\sqrt{2})^4$

تمرين 36

نعتبر العددين المركبين :

$$L = (\sqrt{6} - \sqrt{2}) + (\sqrt{6} + \sqrt{2})i \quad \text{و} \quad z = -8(\sqrt{3} - i)$$

(1) أ - احسب طولاً وعمدة z . ب - احسب z^{2002} .

ج - عين العدد الطبيعي n لكي يكون $z^n \in \mathbb{R}$.

(2) أ - احسب L^2 . ب - استنتج قيمة $\cos \frac{5\pi}{12}$ و $\sin \frac{5\pi}{12}$.

(3) نعتبر في \mathbb{C} المعادلة :

$$z^2 + 2(\sqrt{3} - 2i)z - 16(7 - 5\sqrt{3}i) = 0$$

- تحقق أن $z = -8(\sqrt{3} - i)$ هو جذر للمعادلة ثم استنتج الجذر الآخر.

الحل

(1) أ - حساب طولاً وعمدة z .

$$|z| = |-8(\sqrt{3} - i)| = 16$$

$$\arg(z) \equiv \arg[-8(\sqrt{3} - i)] \equiv \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) \equiv \frac{5\pi}{6} [2\pi]$$

ب - حساب z^{2002} . لدينا $z = 16 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$

$$\begin{aligned} z^{2002} &= 16^{2002} \left(\cos \frac{5\pi}{6} \times 2002 + i \sin \frac{5\pi}{6} \times 2002 \right) \\ &= 16^{2002} \left[\cos \left(1668\pi + \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(1668\pi + \frac{\pi}{3} \right) \right] \\ &= 16^{2002} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 16^{2002} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \end{aligned}$$

ج - تعيين العدد الطبيعي n لكي يكون $z^n \in \mathbb{R}$.

$$z^n = 16^n \left(\cos \frac{5\pi}{6} \times n + i \sin \frac{5\pi}{6} \times n \right)$$

$$\frac{5\pi}{6} \times n = K\pi \quad \text{ومنه} \quad \sin \frac{5\pi}{6} \times n = 0$$

ومنه : $5n = 6K$ حيث : $K \in \mathbb{N}$.

و بتطبيق نظرية غوص نجد : $n = 6h$ ، $(h \in \mathbb{N})$.

(2) أ - حساب L^2 .

$$L = [(\sqrt{6} - \sqrt{2}) + (\sqrt{6} + \sqrt{2})i]^2 = -8\sqrt{3} + 8i = z$$

ومنه L هو جذر تربيعي للعدد المركب z .

ب - استنتج قيمة $\cos \frac{5\pi}{12}$ و $\sin \frac{5\pi}{12}$.

لنعين أولاً الجذور التربيعية للعدد المركب z على الشكل المثلثي .

إذا كان $\alpha = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ جذراً تربيعياً للعدد المركب z

فإن $\alpha^2 = z$.

$$= (128 - 16 - 112) + i(-128\sqrt{3} + 48\sqrt{3} + 80\sqrt{3}) = 0$$

إذن $z = -8(\sqrt{3} - i)$ هو جذر للمعادلة .

نعلم أن مجموع جذري معادلة من الدرجة الثانية

$$az^2 + bz + c = 0 \text{ يساوي } -\frac{b}{a} . \text{ ومنه فإن}$$

$$z' + z = -2(\sqrt{3} - 2i) \text{ ومنه :}$$

$$z' - 8(\sqrt{3} - 0i) = -2(\sqrt{3} - 2i) \text{ فيكون } z' = 6\sqrt{3} - 4i .$$

تمرين 37

نعتبر كثير الحدود التالي:

$$P(z) = z^3 + (8 - 10i)z^2 - (20 + 48i)z - 64 + 8i$$

(1) برهن أن المعادلة $P(z) = 0$ تقبل جذرا تخيليا صرفا z_0 يطلب تعيينه.

(2) أ - حل في \mathbb{C} المعادلة $P(z) = 0$.

نرمز بـ z_0, z_1, z_2 لحلول المعادلة حيث $|z_2| > |z_1|$.

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس نعتبر النقاط

M_0, M_1, M_2 ذات اللواحق على الترتيب z_0, z_1, z_2 .

ب - برهن على وجود تشابه S الذي يحول M_0 إلى M_1 و يحول

M_1 إلى M_2 .

ج - عين العناصر المميزة للتشابه S .

د - أكتب العبارة التحليلية للتشابه S .

$$\alpha^2 = z \text{ ومنه :}$$

$$r^2 (\cos 2\theta + i \sin 2\theta) = 16 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) \text{ ومنه :}$$

$$(r^2 = 16 \text{ و } 2\theta = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi) \text{ ومنه :}$$

$$(r = 4 \text{ و } \theta = \frac{5\pi}{12} + k\pi \text{ مع } K \in \{0; 1\})$$

$$\alpha_0 = 4 \left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right) \text{ ومنه :}$$

$$\alpha_1 = 4 \left(\cos \frac{17\pi}{12} + i \sin \frac{17\pi}{12} \right)$$

بما أن $(\operatorname{Re}) L > 0$ و $(\operatorname{Im}) L > 0$ فإن $L = \alpha_0$ ومنه

$$(\sqrt{6} - \sqrt{2}) + (\sqrt{6} + \sqrt{2})i = 4 \left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right)$$

$$\text{ومنه : } \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \text{ و } \sin \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

(3) التحقق من أن $z = -8(\sqrt{3} - i)$ هو جذر للمعادلة :

$$\text{لدينا } z^2 + 2(\sqrt{3} - 2i)z - 16(7 - 5\sqrt{3}i) = 0 \text{ ومنه :}$$

$$64(\sqrt{3} - i)^2 - 16(\sqrt{3} - 2i)(\sqrt{3} - i) - 16(7 - 5\sqrt{3}i)$$

$$= 64(2 - 2\sqrt{3}i) - 16(1 - 3\sqrt{3}i) - 16(7 - 5\sqrt{3}i)$$

الحل

(1) البرهان على أن المعادلة $P(z) = 0$ تقبل جذرا تخيليا صرفا z_0 ليكن $z_0 = iy$ حلا للمعادلة $P(z) = 0$ ومنه $P(iy) = 0$ ومنه $P(iy) = 0$

$$-8y^2 + 48y - 64 + (-y^3 + 10y^2 - 20y + 8)i = 0$$

$$\begin{cases} -8y^2 + 48y - 64 = 0 & \dots(1) \\ -y^3 + 10y^2 - 20y + 8 = 0 & \dots(2) \end{cases}$$

المعادلة (1) تقبل حلين $y_1 = 2$ (مقبول) و $y_2 = 4$

(مرفوض لأنه لا يحقق المعادلة (2) ومنه $z_0 = 2i$.

(2) أ - حل المعادلة $P(z) = 0$.

$$P(z) = (z - 2i)(z^2 + az + c)$$

$$= z^3 + (a - 2i)z^2 + (c - 2ai)z - 2ci$$

بالمطابقة نجد : $a = 8 - 8i$ ، $c = -4 - 32i$.

$$P(z) = 0 \text{ يكافئ } (z - 2i)[z^2 + (8 - 8i)z - 4 - 32i] = 0$$

يكافئ $z = 2i$ أو $z^2 + (8 - 8i)z - 4 - 32i = 0$.

$$\Delta' = (4 - 4i)^2 - (-4 - 32i) = 4$$

$$z_1 = -(4 - 4i) + 2 = -2 + 4i$$

$$z_2 = -(4 - 4i) - 2 = -6 + 4i$$

إذن حلول المعادلة هي :

$$z_2 = -6 + 4i \text{ ، } z_1 = -2 + 4i \text{ ، } z_0 = 2i$$

ب - البرهان على وجود تشابه S الذي يحول M_0 إلى M_1

ويحول M_1 إلى M_2 .

نعلم أن عبارة التشابه S هي $z' = \alpha z + \beta$ حيث $(\alpha; \beta) \in \mathbb{C}^2$

و $|\alpha| \neq 1$.

لدينا :

$$\begin{cases} z_1 = \alpha z_0 + \beta & \dots(1) \\ z_2 = \alpha z_1 + \beta & \dots(2) \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} S(M_0) = M_1 \\ S(M_1) = M_2 \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{z_2 - z_1}{z_1 - z_0} = 1 + i \text{ ومنه } z_2 - z_1 = \alpha(z_1 - z_0)$$

و بالتعويض نجد : $\beta = z_1 - \alpha z_0 = 2i$.

إذن يوجد تشابه S معرف بـ $z' = (1 + i)z + 2i$ يحول النقطة

M_0 إلى M_1 و يحول M_1 إلى M_2 .

ج - العناصر المميزة للتشابه S .

عناصر المميزة للتشابه S هي النسبة وتساوي $|1 + i| = \sqrt{2}$

و الزاوية وهي $\arg(1 + i) = \frac{\pi}{4}$ والمركز وهو النقطة الصامدة

$$\frac{2i}{1 - (1 + i)} = -2 \text{ ذات اللاحقة}$$

د - العبارة التحليلية للتشابه S .

لدينا $z' = (1 + i)z + 2i$ ومنه :

$$x' + iy' = (1+i)(x+iy) + 2i = x - y + i(x+y+2)$$

ومنه : $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y + 2 \end{cases}$ وهي العبارة التحليلية للتشابه S .

تمرين 38

(1) حل في \mathbb{C} المعادلة : $z^3 - (1+i)z^2 - 2(1+i)z + 8 = 0$

علما أنها تقبل حلا حقيقيا z_0 . نرسم z_0, z_1, z_2 لحلول المعادلة حيث $|z_1| < |z_2|$.

$$(2) \text{ أ- احسب } \left(\frac{z_1}{\sqrt{2}}\right)^{2000} + \left(\frac{z_2}{2\sqrt{2}}\right)^{2004}$$

ب- عين العدد الطبيعي n لكي يكون $z_1^n \in \mathbb{R}_+$.

(3) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس نعتبر النقاط

A, B, C ذات اللواحق على الترتيب z_0, z_1, z_2 .

أ- عين لاحقة G مركز ثقل المثلث ABC .

ب- عين مجموعة النقط $M(z)$ بحيث :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = K, (K \in \mathbb{R})$$

الحل

(1) أ- البرهان على أن المعادلة تقبل جذرا حقيقيا z_0 .

ليكن $z_0 = x$ حلا للمعادلة ومنه :

$$x^3 - (1+i)x^2 - 2(1+i)x + 8 = 0 \text{ ومنه :}$$

$$(x^3 - x^2 - 2x + 8) + i(-x^2 - 2x) = 0 \text{ ومنه :}$$

$$\begin{cases} x^3 - x^2 - 2x + 8 = 0 & \dots (1) \\ -x^2 - 2x = 0 & \dots (2) \end{cases} \text{ المعادلة (2) تقبل حلين}$$

$x_1 = 0$ (مرفوض) و $x_2 = -2$ مقبول لأنه يحقق المعادلة (1).

ومنه : $z_0 = -2$.

ب - حل المعادلة :

$$(z+2)(z^2 + az + c) = z^3 + (a+2)z^2 + (c+2a)z + 2c$$

$$\text{بالمطابقة نجد : } \begin{cases} a+2 = -1-i \\ c+2a = -2(1+i) \\ 2c = 8 \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} a = -3-i \\ c = 4 \end{cases}$$

$$P(z) = 0 \text{ ومنه : } (z+2)[z^2 - (3+i)z + 4] = 0$$

$$z = -2 \text{ أو } z^2 - (3+i)z + 4 = 0$$

المعادلة الثانية من الدرجة الثانية مميزها

$$\Delta = (3+i)^2 - 16 = -8 + 6i$$

والجذور التربيعية للعدد Δ هي :

$$\alpha_1 = 1+3i \text{ و } \alpha_2 = -1-3i$$

$$\text{ومنه : } z_1 = \frac{(3+i) - (1+3i)}{2} = 1-i$$

$$z_2 = \frac{(3+i) + (1+3i)}{2} = 2(1+i)$$

$$Z_G = \frac{z_0 + z_1 + z_2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}i$$

ب- تعيين مجموعة النقط

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = K : M(z)$$

نعلم أن :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$$

$$GB^2 = |z_1 - z_G|^2 = \frac{20}{9} \quad , \quad GA^2 = |z_0 - z_G|^2 = \frac{50}{9}$$

$$GC^2 = |z_2 - z_G|^2 = \frac{50}{9}$$

$$. MG^2 = \frac{1}{3} \left(K - \frac{40}{3} \right) \quad \text{إذن } 3MG^2 = K - \frac{40}{3} \text{ ومنه :}$$

إذا كان $K > \frac{40}{3}$ فإن مجموعة النقط M هي دائرة مركزها G

$$. R = \sqrt{\frac{1}{3} \left(K - \frac{40}{3} \right)} \text{ ونصف قطرها}$$

إذا كان $K < \frac{40}{3}$ فإن مجموعة النقط M هي مجموعة خالية.

إذا كان $K = \frac{40}{3}$ فإن مجموعة النقط M هي النقطة G .

تمرين 39

ليكن كثير الحدود $P(z) = z^3 + z^2 + (-5 + 4i)z - 21 - 12i$

$$(2) \quad \text{أ - حساب} \quad \left(\frac{z_1}{\sqrt{2}} \right)^{2000} + \left(\frac{z_2}{2\sqrt{2}} \right)^{2004}$$

$$, z_1 = \sqrt{2} \left[\cos \left(\frac{-\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{-\pi}{4} \right) \right]$$

$$. z_2 = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\left(\frac{z_1}{\sqrt{2}} \right)^{2000} + \left(\frac{z_2}{2\sqrt{2}} \right)^{2000} = \cos \frac{-\pi}{4} \times 2000 + i \sin \frac{-\pi}{4} \times 2000$$

$$+ \cos \frac{\pi}{4} \times 2004 + i \sin \frac{\pi}{4} \times 2004$$

$$(\cos 500\pi - i \sin 500\pi) + (\cos 501\pi + i \sin 501\pi)$$

$$(1 - 0) + (-1 + 0) = 0$$

ب - تعيين العدد الطبيعي n لكي يكون $z_1^n \in \mathbb{R}_+^*$

$$. z_1^n = \sqrt{2}^n \left[\cos \left(\frac{-n\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{-n\pi}{4} \right) \right]$$

$$\frac{n\pi}{4} = (2K+1)\pi \quad \text{ومنه} \quad \begin{cases} -\sin \frac{n\pi}{4} = 0 \\ \cos \frac{n\pi}{4} < 0 \end{cases} \quad \text{يكافئ } z_1^n \in \mathbb{R}_+^*$$

ومنه : $n = 4(1+2K) = 8K + 4$ حيث $(K \in \mathbb{N})$

(3) أ - تعيين لاحقة G مركز ثقل المثلث ABC .

1- أ) برهن أن المعادلة $P(z) = 0$ تقبل جذرا حقيقيا z_0 يطلب تعيينه .
 ب) حل المعادلة $P(z) = 0$.

ولتكن z_0, z_1, z_2 جذورها حيث $|z_1| < |z_2|$.

2) نعتبر في المستوي المركب المزود بمعلم متعامد ومتجانس النقاط A, B, C ذات اللواحق على الترتيب z_0, z_1, z_2 .

أ) عين طبيعة المثلث ABC .

ب) عين لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث.

ج) عين مجموعة النقط $M(z)$ حيث :

$$|z - z_0|^2 + |z - z_1|^2 + |z - z_2|^2 = \frac{267}{9}$$

3) عين العناصر المميزة للتشابه S الذي مركزه A ويحول النقطة B إلى C .

الحل

1) البرهان على أن المعادلة $P(z) = 0$ تقبل جذرا حقيقيا z_0 .

إذا كان $z_0 = x$ جذرا للمعادلة $P(z) = 0$ فإن $P(x) = 0$

$$P(x) = 0 \text{ يكافئ } x^3 + x^2 + (-5 + 4i)x - 21 - 12i = 0$$

$$\text{ومنه : } (x^3 + x^2 - 5x - 21) + i(4x - 2) = 0$$

$$\text{ومنه : } \begin{cases} x^3 + x^2 - 5x - 21 = 0 \\ 4x - 12 = 0 \end{cases}$$

ومنه : $x = 3$ أي $z_0 = 3$

ب) حل المعادلة $P(z) = 0$

$$P(z) = (z - 3)(z^2 + Az + C) \\ = z^3 + (A - 3)z^2 + (C - 3A)z - 3C$$

$$\begin{cases} A - 3 = 1 \\ C - 3A = -5 + 4i \\ -3C = -21 - 12i \end{cases}$$

$$\text{ومنه : } A = 4, C = 7 + 4i$$

$$P(z) = 0 \text{ يكافئ } (z - 3)(z^2 + 4z + 7 + 4i) = 0$$

$$\text{ومنه : } z = 3 \text{ أو } z^2 + 4z + 7 + 4i = 0$$

المعادلة الثانية من الدرجة الثانية مميزها

$$\Delta' = 4 - 7 - 4i = -3 + 4i$$

إذا كان $\alpha = x + iy$ جذرا تربيعيا للعدد المركب Δ' فإن $\alpha^2 = \Delta'$ ومنه:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -3 & \dots (1) \\ x^2 + y^2 = 5 & \dots (2) \\ xy = 2 & \dots (3) \end{cases}$$

ومنه : $\alpha_1 = 1 + 2i, \alpha_2 = -1 - 2i$ ومنه حلول المعادلة

$$\text{هي : } z_0 = 3, z_1 = -2 + (1 + 2i) = -1 + 2i$$

$$z_2 = -2 - (1 + 2i) = -3 - 2i$$

2- أ) طبيعة المثلث ABC

$$MG^2 = 1 \text{ يكافئ } 3MG^2 + \frac{100}{9} + \frac{40}{9} + \frac{100}{9} = \frac{267}{9}$$

إن مجموعة النقط M هي الدائرة (C) التي مركزها G ونصف قطرها 1.

(3) تعيين العناصر المميزة للتشابه S .

نعلم أن عبارة التشابه S هي $z' = \alpha z + \beta$ ولدينا

$$z_0 = \alpha z_0 + \beta \text{ ومنه } S(A) = A \text{ و } S(B) = C$$

$$\text{و } z_2 = \alpha z_1 + \beta \text{ فتكون : } z_2 - z_0 = \alpha(z_1 - z_0)$$

$$\text{ومنه : } \alpha = \frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} = 1 + i$$

$$\beta = z_0 - \alpha z_0 = 3 - 3(1 + i) = -3i$$

$$\text{ومنه : } z' = (1 + i)z - 3i$$

فالتحويل S هو تشابه نسبته $\sqrt{2}$ و زاويته هي :

$$\arg(1 + i) = \frac{\pi}{4} \text{ ومركزه } A.$$

تمرين 40

نعتبر كثير الحدود $P(z) = z^4 + 17z^2 - 28z + 260$ حيث z عدد

مركب .

(1) عين العددين الحقيقيين A و B بحيث :

$$P(z) = (z^2 + Az + B)(z^2 + 4z + 20)$$

(2) حل في \mathbb{C} المعادلة $P(z) = 0$.

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ ومنه } Z_{\overrightarrow{AB}} = z_1 - z_0 = -4 + 2i$$

$$\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ ومنه } Z_{\overrightarrow{BC}} = z_2 - z_1 = -2 - 4i$$

$$BC = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{20}, AB = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = \sqrt{20}$$

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC} \text{ إذن } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = (-4)(-2) + (2)(-4) = 0$$

ومنه فالمثلث ABC قائم الزاوية في B ومتساوي الساقين .

(ب) تعيين لاحقة G مركز ثقل المثلث ABC .

$$z_G = \frac{z_0 + z_1 + z_2}{3} = \frac{3 + (-1 + 2i) + (-3 - 2i)}{3} = -\frac{1}{3}$$

(ج) تعيين مجموعة النقط $M(z)$.

$$|z - z_0|^2 + |z - z_1|^2 + |z - z_2|^2 = \frac{267}{9} \text{ ومنه :}$$

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = \frac{267}{9} \text{ ومنه :}$$

$$3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{267}{9}$$

$$\text{حيث : } GA^2 = \left| z_0 + \frac{1}{3} \right|^2 = \frac{100}{9}, GB^2 = \left| z_1 + \frac{1}{3} \right|^2 = \frac{40}{9}$$

$$GC^2 = \left| z_2 + \frac{1}{3} \right|^2 = \frac{100}{9} \text{ ومنه :}$$

$$P(z) = 0 \text{ يكافئ } (z^2 - 4z + 13)(z^2 + 4z + 20) = 0$$

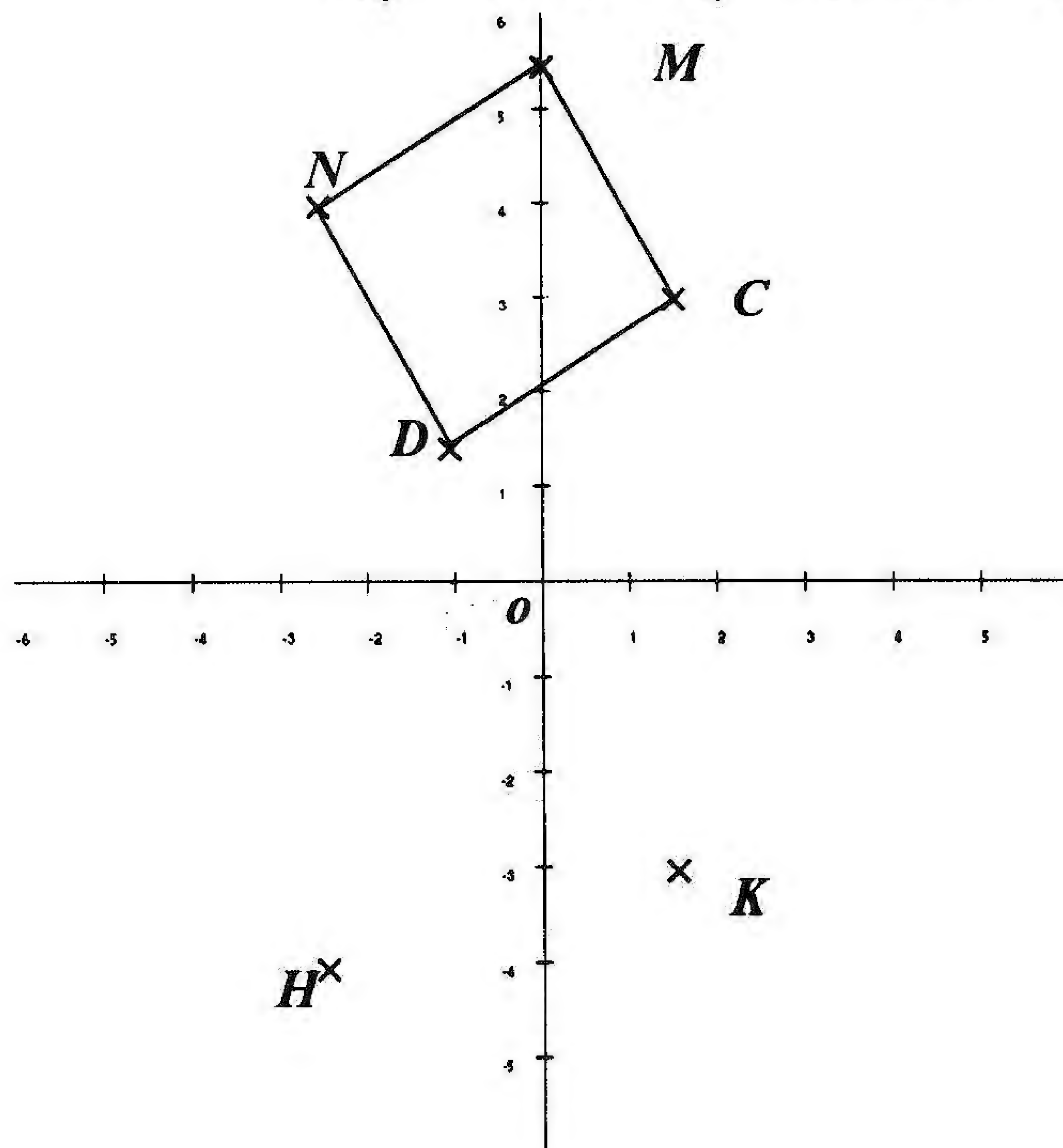
$$z^2 - 4z + 13 = 0 \text{ أو } z^2 + 4z + 20 = 0$$

$$\Delta' = 2^2 - 13 = -9 = (3i)^2, \quad \underline{z^2 - 4z + 13 = 0}$$

$$\text{ومنه : } z_1 = 2 - 3i, \quad z_2 = 2 + 3i$$

$$\Delta' = 2^2 - 20 = -16 = 16i^2, \quad \underline{z^2 + 4z + 20 = 0}$$

$$\text{ومنه : } z_3 = -2 - 4i, \quad z_4 = -2 + 4i$$



3- (أ) أنشئ في معلم متعامد ومتجانس النقاط:

N, H, C, K ذات اللواحق على الترتيب :

$$-2 + 4i, -2 - 4i, 2 + 3i, 2 - 3i$$

(ب) عين العدد المركب z الذي يحقق $\frac{z - z_C}{z - z_N} = i$ ، ثم أنشئ

النقطة M صورة z .

$$4- (أ) فسر هندسيا $\left| \frac{z - z_C}{z - z_N} \right|$ و عمدة $\left(\frac{z - z_C}{z - z_N} \right)$.$$

(ب) ما طبيعة المثلث NCM ؟ (ج) عين لاحقة D رابع رأس المربع $NMCD$.

الحل

(1) تعيين العدد بين الحقيقيين A و B .

$$P(z) = (z^2 + Az + B)(z^2 + 4z + 20)$$

$$= z^4 + (4 + A)z^3 + (20 + 4A + B)z^2 +$$

$$(20A + 4B)z + 20B = z^4 + 17z^2 - 28z + 260$$

$$\text{بالمطابقة نجد : } \begin{cases} 4 + A = 0 \\ 20 + 4A + B = 17 \\ 20A + 4B = -28 \\ 20B = 260 \end{cases} \text{ ومنه :}$$

$$B = 13, A = -4$$

(2) حل للمعادلة $P(z) = 0$.

$$\frac{z - z_C}{z - z_N} = i \text{ تحقق}$$

$$\frac{z - z_C}{z - z_N} = i \text{ ومنه : } i(z - z_N) = z - z_C \text{ ومنه :}$$

$$z(1 - i) = z_C - iz \text{ ومنه : } z = \frac{z_C - iz_N}{1 - i}$$

$$\text{إذن } z = \frac{2 + 3i - i(-2 + 4i)}{1 - i} = \frac{6 + 5i}{1 - i} = \frac{1}{2} + \frac{11}{2}i$$

$$\text{ومنه } M\left(\frac{1}{2}; \frac{11}{2}\right)$$

$$(4) \text{ التفسير الهندسي للنتيجة } \left| \frac{z - z_C}{z - z_N} \right| \text{ وعمدة } \left(\frac{z - z_C}{z - z_N} \right)$$

$$\left| \frac{z - z_C}{z - z_N} \right| = \frac{|z - z_C|}{|z - z_N|} = \frac{MC}{MN}$$

$$\arg\left(\frac{z - z_C}{z - z_N}\right) = \arg(z - z_C) - \arg(z - z_N)$$

$$= (\vec{i}, \overrightarrow{MC}) - (\vec{i}, \overrightarrow{MN}) = (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MC})$$

$$\frac{MC}{MN} \text{ تمثل } \left| \frac{z - z_C}{z - z_N} \right|$$

$$\text{عمدة } \left(\frac{z - z_C}{z - z_N} \right) \text{ تمثل الزاوية } (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MC})$$

(ب) طبيعة المثلث NCM .

$$\frac{MC}{MN} = \left| \frac{z - z_C}{z - z_N} \right| = |i| = 1 \text{ ومنه : } MN = MC$$

$$\text{الزاوية } (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MC}) \text{ هي عمدة } \left(\frac{z - z_C}{z - z_N} \right)$$

$$\arg\left(\frac{z - z_C}{z - z_N}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}$$

إذن المثلث NCM قائم الزاوية في M ومتساوي الساقين.

(ج) تعيين لاحقة D الرأس الرابع للمربع $NMCD$.

$$NMCD \text{ مربع معناه } \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{CD} \text{ يكافئ } Z_{\overrightarrow{MN}} = Z_{\overrightarrow{CD}}$$

$$\text{ومنه : } (-2 + 4i) - \left(\frac{1}{2} + \frac{11}{2}i\right) = z_D - 2 - 3i$$

$$z_D - 2 - 3i = \frac{-5}{2} - \frac{3}{2}i \text{ ومنه : } z_D = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$$

$$\text{إذن لاحقة } D \text{ هي } z_D = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$$

تمارين مرفقة بالنتائج

تمرين 01

$$\alpha = -\sqrt{3} + i$$

(1) أكتب α على الشكل المثلثي. (2) أ - أكتب z على الشكلين المثلثي

و الجبري حيث : $\alpha \cdot z = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right)$.

ب - استنتج قيمة $\cos \frac{7\pi}{12}$ و $\sin \frac{7\pi}{12}$.

(3) المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ،

A و B نقطتان من المستوي لاحقتاهما على الترتيب

$-\sqrt{3} + i$ و $1 - i$. عين لاحقة C حتى تكون النقطة O مركز
ثقل المثلث ABC .

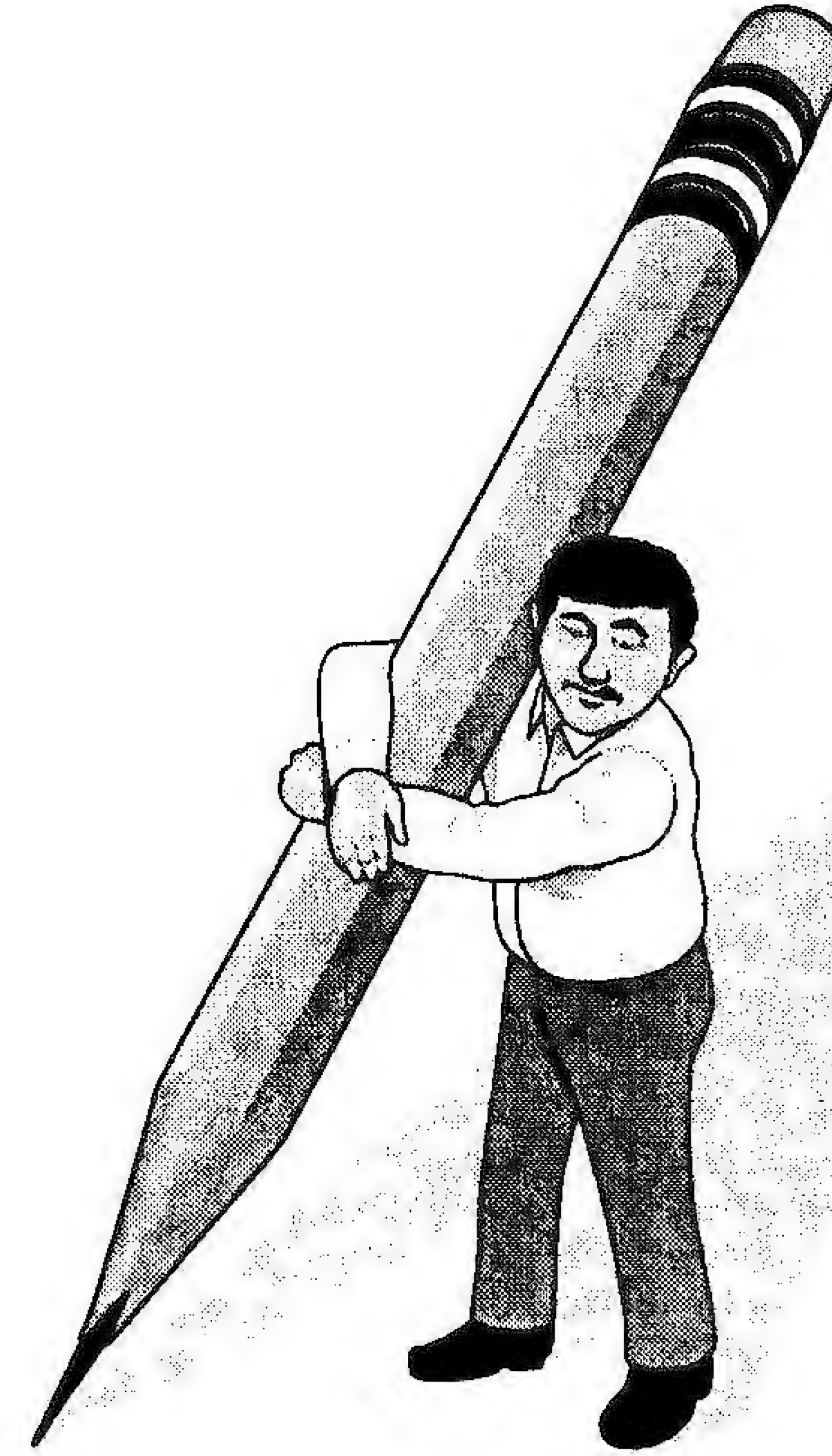
- النتائج: (1) $\alpha = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$

(2) أ - $z = \boxed{1 - i}$. ب - $\sin \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}$ ،

(3) $z_C = \sqrt{3} - 1$. $\cos \frac{7\pi}{12} = \frac{-\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}$

تمرين 02

نعتبر الدوران R المعروف في المجموعة C بـ : $z' = \alpha z + \beta$



Scanned by : Mekkaoui Ayoub
Email: ayoubsoft2011@hotmail.fr

حيث: $|\beta|=1$. نضع $L = \frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha\beta}$.

(1) عين \bar{L} ثم استنتج أن L حقيقيا .

(2) عين α و β علما أن صورتا النقطتين $A\left(0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$B\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ هما $A'\left(0; \frac{1}{2}\right)$ ، $B'(0;1)$ على الترتيب ، ثم

عين العناصر المميزة للدوران R .

- النتائج: (1) $\bar{L} = \frac{\bar{\alpha} + \bar{\beta}}{1 + \alpha\beta}$. بما أن $L = \bar{L}$ فإن L حقيقيا .

(2) $\alpha = i$ و $\beta = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ ، العناصر المميزة للدوران R هي:

الزاوية $\frac{\pi}{2}$ والمركز النقطة ذات اللاحقة

$$\frac{1}{4}[(\sqrt{3}-1) + i(\sqrt{3}+1)]$$

تمرين 03

(1) احسب $(1+4i)^2$. (2) حل في \mathbb{C} المعادلة :

$z^2 - (3+2i)z + 5+i = 0$ نسمي z_1 و z_2 حلي المعادلة حيث :

(3) - أكتب z_1 على الشكل المثلثي . $|z_2| > |z_1|$

ب - احسب $\left(\frac{z_1}{\sqrt{2}}\right)^{2002}$.

(4) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس ، نعتبر النقاط A ، B ، C ، D ذات اللواحق على الترتيب

z_1 ، z_2 ، $(1+i)$ ، $(3-i)$. أ برهن على وجود تشابه

S مركزه C ويحول النقطة A إلى النقطة D .

- النتائج:

(1) $(1+4i)^2 = -15+8i$. (2) $z_1 = 1-i$ ، $z_2 = 2+3i$.

(3) أ- $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)$.

ب- $\left(\frac{z_1}{\sqrt{2}}\right)^{2002} = -i$.

(4) أ- العبارة المركبة للتشابه S هي : $z' = (1+i)z + 1-i$.

ب- العناصر المميزة للتشابه هي : النسبة $\sqrt{2}$ ، الزاوية $\frac{\pi}{4}$ ،

المركز هو النقطة C ذات اللاحقة $(1+i)$.

تمرين 04

(1) أكتب على الشكل المثلثي جذور المعادلة

* $z^3 = 4\sqrt{2}(-1+i)$. - تحقق أن $z_0 = \sqrt{2}(1+i)$ هو

حل للمعادلة * . (2) أكتب الجذور التكعيبية على الشكل الجبري

للعدد 1 ، ثم استنتج الشكل الجبري لحلول المعادلة * .

$$(3) \text{ استنتج قيمة } \cos \frac{11\pi}{12} , \sin \frac{11\pi}{12}$$

- النتائج:

(1) حلول المعادلة * هي :

$$z_0 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$z_1 = 2 \left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right)$$

$$z_2 = 2 \left(\cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12} \right)$$

(2) الجذور التكعيبية للعدد 1 هي: 1 , $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ وتكون جذور المعادلة * على الشكل الجبري هي:

$$z_0 = \sqrt{2}(1+i) , z_1 = -\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{2} + \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{2}i$$

$$z_2 = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{2} - \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{2}i$$

$$\cos \frac{11\pi}{12} = -\frac{\sqrt{2} + (1+\sqrt{3})}{4} \quad (3)$$

$$\sin \frac{11\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$$

تمرين 05

نعتبر كثير الحدود :

$$P(z) = z^4 - 8(1+i)z^3 + 48iz^2 + 64(1-i)z - 80$$

(1) أ- برهن أن المعادلة $P(z) = 0$ تقبل جذرا حقيقيا z_0 وجذرا تخيليا z_1 يطلب تعيينهما .

ب- عين العددين الحقيقيين α و β بحيث:

$$P(z) = (z - z_0)(z - z_1)(z^2 + \alpha z + \beta)$$

(2) حل المعادلة $P(z) = 0$ (3) في المستوي المزود بمعلم متعامد ومتجانس نعتبر النقاط :

$$A(2;0) , B(0;2) , C(2;4)$$

$$D(4;2) . R \text{ هو الدوران الذي مركزه } A \text{ و زاويته } \frac{\pi}{2} .$$

- تحقق أن $R(D) = B$ (3) - عين لاحقة C' صورة النقطة

C بالدوران R .

- النتائج:

$$(1) \text{ أ- } z_0 = 2 , z_1 = 2i . \text{ ب- } \alpha = -(6+6i) , \beta = 20i$$

$$(2) \text{ حلول المعادلة هي : } z_0 = 2 , z_1 = 2i$$

$$(3) Z_{C'} = -2 , z_3 = 2+4i , z_4 = 4+2i$$

تمرين 06

α عدد مركب طويلته r و عمدته θ حيث $\theta \in]0; \pi[$.

(1) أنشر $[1+i(1-\alpha^2)]^2$. (2) حل في \mathbb{C} المعادلة :
 الجذر المستقل عن α و z_2 للجذر الآخر.
 $z^2 - [1+i(\alpha^2+1)]z + \alpha^2(-1+i) = 0$ ، نرمز بـ z_1 إلى

(3) أ- عين العدد الطبيعي n حتى يكون z^n حقيقي موجب .
 ب- حدد r و θ حتى يكون z_1 و z_2 مترافقان.

- النتائج:

(1) $- \alpha^4 + 2\alpha^2 + 2i(1-\alpha^2)$ (2. $z_1 = 1+i$ ، $z_2 = \alpha^2 i$)
 (3) أ- $n = 8K$ ($K \in \mathbb{N}$) . ب- $r = \sqrt[4]{2}$ ، $\theta = \frac{5\pi}{8}$.

تمرين 07

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول z .

$$z^3 - 2(1+i\sqrt{3})z^2 + 4(-1+i\sqrt{3})z + 8 = 0 \dots *$$

(1) بين أن المعادلة * تقبل حلا حقيقيا z_0 يطلب تعيينه .

(2) حل المعادلة * ، يرمز لحلول المعادلة * بـ z_0 ، z_1 ، z_2 حيث

z_1 هو الحل الذي جزؤه الحقيقي سالب . (3) أ- أكتب حلول

المعادلة * على الشكل المثلثي . ب- احسب z_1^2 ، z_1^3 .

ج- أثبت أنه : $\forall n \in \mathbb{N}$ فإن $z_2^{3n+2} = -2^{3n+1} \cdot z_2$.

د- عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون z_2^n عدد حقيقي .

- النتائج:

(1) $z_0 = 2$ (2. $z_0 = 2$ ، $z_1 = -1+i\sqrt{3}$ ، $z_2 = 1+i\sqrt{3}$.

$$(3) \text{ أ- } z_0 = 2(\cos 0 + i \sin 0)$$

$$z_2 = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right) , z_1 = 2\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\text{ب- } z_1^3 = 8 , z_1^2 = -2 - 2\sqrt{3}i$$

$$\text{ج- } z_1^{3n+2} = z_1^{3n} \times z_1^2 = -2^{3n+1} \cdot z_2$$

$$\text{د- } n = 3K , (K \in \mathbb{N})$$

تمرين 08

نعتبر التطبيق المعرف في $\mathbb{C} - \{2\}$ بـ : $f(z) = \frac{3iz+1-3i}{z-2}$

(1) أ- برهن بأن f هو تقابل من $\mathbb{C} - \{2\}$ على مجموعة جزئية

من \mathbb{C} يطلب تعيينها . ب- أكتب عبارة f^{-1} .

(2) نعتبر التحويل T الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة

$$M'(z') \text{ حيث } z' = f(z)$$

(3) عين مجموعة النقاط الصامدة للتحويل T .

(4) عين مجموعة النقاط $M(z)$ بحيث $|f(z)| = 1$.

- النتائج:

(1) أ- f هو تقابل من $\mathbb{C} - \{2\}$ نحو $\mathbb{C} - \{3i\}$.

$$\text{ب- } f^{-1}(z) = \frac{2z+1-3i}{z-3i}$$

(2) التحويل T له نقطتان صامدتان لاحقتاهما:

$$z_2 = 1+i , z_1 = 1+2i$$

(3) مجموعة النقاط $M(z)$ هي الدائرة التي مركزها $\omega\left(\frac{7}{8}; \frac{3}{8}\right)$

$$\text{ونصف قطرها } r = \frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{2}}$$

تمرين 09

(1) حل في \mathbb{C} المعادلة $z^2 - 4(1+i)z + 16i = 0$.

(2) استنتج حلول المعادلة (*) $z^4 - 4(1+i)z^2 + 16i = 0$.

(3) في المستوى المزود بمعلم متعامد ومتجانس، نعتبر النقط M_1, M_2, M_3, M_4 صور حلول المعادلة (*). بين أن هذه النقط تنتمي إلى نفس الدائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

(4) نعتبر التحويل S الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة

$$M'(z') \text{ حيث: } z' = \sqrt{2}(1+i)z + 1 - \sqrt{2}(1+i)$$

ما طبيعة التحويل S وما هي عناصره المميزة؟

- النتائج:

(1) حلول المعادلة هي: $z_1 = 4, z_2 = 4i$.

(2) حلول المعادلة (*) هي: $z_1 = 2, z_2 = -2$.

$$z_3 = \sqrt{2}(1+i), z_4 = -\sqrt{2}(1+i)$$

(3) لدينا $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| = 2$ أي:

$OM_1 = OM_2 = OM_3 = OM_4 = 2$ إذن النقط M_1, M_2, M_3, M_4

تنتمي إلى نفس الدائرة مركزها O (مبدأ المعلم) ونصف قطرها 2.

(4) التحويل S هو تشابه نسبته 2 و زاويته $\frac{\pi}{4}$ و مركزه النقطة

الصامدة ذات اللاحقة 1.

تمرين 10

$$\text{ليكن العدان المركبان } z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i), z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

(1) أكتب على الشكل المثلثي $z_1, z_2, \frac{z_1}{z_2}$ ، $(z_1 \cdot z_2)^6$:

(2) في المستوى المزود بمعلم متعامد و متجانس نعتبر الدوران

R الذي مركزه $\omega(1;0)$ و زاويته $\frac{\pi}{4}$. أ- أكتب العبارة المركبة

للدوران R . ب- لتكن النقطتان A و B ذات اللاحقتين على

الترتيب z_1 و z_2 . عين لاحقتي $R(A)$ و $R(B)$.

- النتائج:

$$(1) z_1 = \cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{-\pi}{4}\right), z_2 = \cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \cos\left(\frac{-7\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{-7\pi}{12}\right)$$

$$(z_1 \cdot z_2)^6 = \cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2}$$

$$(2) \text{ أ- } z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)z + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

لاحقة النقطة $R(A)$ هي : $\left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

ب- لاحقة $R(B)$:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

تمرين 11

لتكن في \mathbb{C} المعادلة :

$$(1) \quad z^3 + (8 - 2i)z^2 + (20 - 10i)z + 12 - 16i = 0$$

(1) تحقق أن $z_0 = -1 + i$ هو حل للمعادلة (1).

(2) استنتج الجذرين الآخرين z_1 و z_2 للمعادلة (1) (الجزء التخييلي لـ z_1 موجب).

(3) في المستوي المزود بمعلم متعامد و متجانس نعتبر النقط A, B, C ذات اللواحق على الترتيب z_0, z_1 و z_2 .

أ- عين لاحقة G مرجع الجملة : $\{(A; 2), (B; -2), (C; 1)\}$.

ب- عين المجموعة (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ حيث

$$2MA^2 - 2MB^2 + MC^2 = 56$$

- النتائج :

(1) z_0 يحقق المعادلة (1). (2) الجذرين الآخرين للمعادلة (1) هما :

$$z_1 = -4 + 2i \quad \text{و} \quad z_2 = -3 - i$$

(3) أ- $z_G = 3 - 3i$. ب- المجموعة (Γ) هي الدائرة التي

مركزها G و نصف قطرها 10 .

تمرين 12

ليكن $L = \frac{\alpha i - 4\beta}{5 + 3i}$ حيث $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$ عين العددين

الحقيقيين α و β علما أن $|L| = 1$ و $\text{Arg}L \equiv \frac{3\pi}{4} [2\pi]$.

(2) نفرض أن $\alpha = \sqrt{2}$ و $\beta = \sqrt{2}$. أ- احسب $L^{12} + L^{16}$.

ب- برهن أنه مهما تكون الأعداد الطبيعية n (عدد زوجي)

و m (عدد فردي) فإن : $L^{4n} + L^{4m} = 0$.

- النتائج :

$$(1) \quad \alpha = \beta = \sqrt{2} \quad \text{أ-} \quad L^4 = -1 \quad \text{لدينا}$$

$$L^{12} + L^{16} = (L^4)^3 + (L^4)^4 = -1 + 1 = 0$$

$$(ب) \quad L^{4n} = (L^4)^n = 1 \quad \text{و} \quad L^{4m} = (L^4)^m = -1$$

$$\text{ومنه: } L^{4n} + L^{4m} = 0$$

تمرين 13

نعتبر في المجموعة \mathbb{C} كثير الحدود :

$$P(z) = z^3 + z^2 + (-5 + 4i)z - 21 - 12i$$

(1) أ- برهن بأن المعادلة $P(z) = 0$ تقبل حلا حقيقيا z_0 يطلب

تعيينه . ب- حل في \mathbb{C} المعادلة $P(z) = 0$.

(2) في المستوي المزود بمعلم متعامد و متجانس نعتبر النقط

A, B, C ذات اللواحق على الترتيب : $3, -1 - 2i$ ،

$-3 + 2i$. عين التشابه S الذي مركزه A و يحول B

إلى C ثم أعط عناصره المميزة.

- النتائج:

1) أ- $z_0 = 3$. ب- حلول المعادلة $P(z) = 0$ هي : $z_0 = 3$ ،

$z'_1 = (1-i)z + 3i$ (2 . $z_2 = -3 + 2i$ ، $z_1 = -1 - 2i$

العناصر المميزة للتشابه S هي : المركز : النقطة A ،

النسبة : $|1-i| = \sqrt{2}$ ، الزاوية : $-\frac{\pi}{4}$.

تمرين 14

1) أكتب العدد المركب $u = \frac{\sqrt{3}-i}{1-i}$ على شكله الجبري

و المثلثي . 2) احسب u^4 .

3) عين الجذور من الرتبة الرابعة للعدد $L = 2(1+i\sqrt{3})$.

- النتائج:

$$1) u = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}i$$

$$u = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$$

2) $u^4 = 2(1+i\sqrt{3})$. الجذور من الرتبة الرابعة للعدد L هي:

$$\frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}i , \quad -\frac{\sqrt{3}+1}{2} - \frac{\sqrt{3}-1}{2}i$$

$$\frac{\sqrt{3}-1}{2} - \frac{\sqrt{3}+1}{2}i , \quad -\frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}i$$

تمرين 15

نعتبر في المجموعة \mathbb{C} كثير الحدود :

$$P(z) = z^3 - 2z^2 - iz + 3 - i$$

1) أ- احسب $P(-1)$. ب- أوجد كثير الحدود $Q(z)$ بحيث:

$P(z) = (z+1) \times Q(z)$. ج- حل في المجموعة \mathbb{C} المعادلة

$P(z) = 0$ (2 . ليكن z_1 الحل الذي جزؤه التخيلي موجب

و z_2 الحل الذي جزؤه التخيلي سالب و z_3 الحل الثالث.

أ- أكتب كل من الأعداد : $z_1 - 1$ ، z_2 ، z_3 على الشكل المثلثي .

ب- تحقق أن $(z_1 - 1)z_2$ هو عدد حقيقي و أن $\frac{z_1 - 1}{z_2}$ هو عدد

تخيليا صرفا . 3) لتكن M_1 و M_2 صورتين العددين $z_1 - 1$

و z_2 على التوالي في المستوي المركب .

أ- بين أن المثلث OM_1M_2 متساوي الساقين (O مبدأ المعلم)

ب- احسب قياس زاوية الدوران الذي مركزه النقطة O و يحول

M_1 إلى M_2 .

- النتائج:

1) أ- $P(-1) = 0$. ب- $Q(z) = z^2 - 3z + 3 - i$.

ج- حلول المعادلة $P(z) = 0$ هي : $2+i$ ، $1-i$ ، -1 .

$$2) \text{ أ- } z_1 - 1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$z_2 = \sqrt{2} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right]$$

$$z_3 = \cos \pi + i \sin \pi$$

$$\text{ب- } (z_1 - 1)z_2 = 2 \quad , \quad \frac{z_1 - 1}{z_2} = i$$

$$(3) \text{ أ- } OM_1 = |z_1 - 1| = \sqrt{2} \quad , \quad OM_2 = \sqrt{2} \quad \text{فالمثلث } OM_1M_2 \text{ متساوي الساقين.}$$

ب- زاوية الدوران الذي مركزه النقطة O و يحول M_2 إلى M_1 هي $\frac{\pi}{2}$.

تمرين 16

نعتبر في \mathbb{C} المعادلة $z^2 - 2i\bar{z} = 0$ (E) نضع $z = x + iy$ حيث $(x; y) \in \mathbb{R}^2$.

(1) حل في \mathbb{C} المعادلة (E). (2) ليكن z_1, z_2, z_3 حلول المعادلة (E) غير المعدومة. (أ) - أنشئ في المستوي المركب النقط $M_1(z_1)$ و $M_2(z_2)$ و $M_3(z_3)$ و أثبت أن المثلث $M_1M_2M_3$ متقايس الأضلاع.

(3) ليكن f تطبيق بحيث: $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

$$f(z) = (-\sqrt{3} + i)z + i \quad \text{و}$$

أ- حدد طبيعة و عناصر التطبيق f . ب- لتكن z'_1, z'_2, z'_3 صور z_1, z_2, z_3 على التوالي ب f . بين أن النقط $M'_1(z'_1)$ و $M'_2(z'_2)$ و $M'_3(z'_3)$ تنتمي إلى دائرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها.

- النتائج:

$$(1) \text{ حلول المعادلة } (E) \text{ هي: } 0, -2i, \sqrt{3} + i, -\sqrt{3} + i.$$

$$(2) \text{ ب- } M_2M_3 = M_1M_3 = M_1M_2 = 2\sqrt{3} \quad \text{فالمثلث } M_1M_2M_3 \text{ متقايس الأضلاع.}$$

(3) التطبيق f هو تشابه مباشر مركزه النقطة ω لاحقها

$$\frac{i}{1 + \sqrt{3} - i} \quad \text{و نسبته } 2 \quad \text{و زاويته } \frac{5\pi}{6}.$$

تمرين 17

نعتبر في المجموعة \mathbb{C} كثير الحدود:

$$P(z) = z^4 - 2z^3 + 6z^2 - 8z + 8$$

(1) تحقق أن $z_0 = 2i$ هو حل للمعادلة (E): $P(z) = 0$.

(2) أ- بين أنه إذا كان z حل للمعادلة (E) فإن \bar{z} يكون حلا أيضا

للمعادلة (E). ب- استنتج حل آخر للمعادلة (E).

(3) عين عددين مركبين a و b بحيث:

$$P(z) = (z^2 + 4)(z^2 + az + b)$$

(4) حل المعادلة (E) و اكتب الحلول على الشكل المثلثي.

(5) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ نعتبر النقط $A(z_0)$ و $B(z_1)$ و $C(z_1 - 2)$ مع $z_0 = 2i$ و $z_1 = 1 + i$. ليكن R الدوران بحيث $R(O) = C$ و $R(A) = B$. حدد عناصر الدوران R .

- النتائج:

(1) نجد : $P(2i) = 0$. $P(z) = 0$ حل للمعادلة (E) يعني

$P(z) = 0$ ومنه : $\overline{P(z)} = 0$ أي أن :

$$P(\bar{z}) = 0 \quad \text{ومنه} \quad \bar{z}^4 - 2\bar{z}^3 + 6\bar{z}^2 - 8\bar{z} + 8 = 0$$

إن \bar{z} حل للمعادلة (E) .

ب- بما أن $z = 2i$ حل للمعادلة (E) فإن $\bar{z} = -2i$ حل لـ (E)

(3) $a = -2$ و $b = 2$. (4) حلول المعادلة $P(z) = 0$ هي :

$2i$ ، $-2i$ ، $1-i$ ، $1+i$
الكتابة على الشكل المثلثي :

$$1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$1-i = \sqrt{2} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right]$$

$$-2i = 2 \left[\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right]$$

$$2i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$$

(5) عبارة الدوران R هي : $z' = -iz - 1 + i$. مركز الدوران R هو النقطة التي لاحقتها i وزاوية الدوران R هي $\frac{3\pi}{2}$.

تمرين 18

أكتب على الشكل المثلثي كلا من العددين المركبين

$$b = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \quad , \quad a = \frac{1}{2}(1+i)$$

(2) حل في \mathbb{C} المعادلة (E) : $z^2 + (-1+2i)z - i = 0$

(3) ليكن z_1 ، z_2 جذري المعادلة (E) بحيث تخيلي z_1 أصغر من

$$z_2 \quad \text{تخيلي} \quad z_2 \quad \text{أ-} \quad \text{بين أن} \quad a \cdot z_1 = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2} \right) b$$

ب - استنتج كتابة z_1 على الشكل المثلثي .

ج - أكتب $z_1 \cdot z_2$ على الشكل المثلثي ثم استنتج كتابة z_2 على

المثلثي . (4) ليكن في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد

ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ التشابه S الذي يربط كل نقطة $M(z)$

$$\text{بالنقطة} \quad M'(z') \quad , \quad \text{حيث} \quad z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \right) z$$

حدد عناصر التشابه S .

- النتائج:

$$a = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \quad (1)$$

$$b = \cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right)$$

$$z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}-2}{2}i, \quad z_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}+2}{2}i \quad (2)$$

$$z_1 = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} \left[\cos \left(-\frac{5\pi}{12} \right) + i \sin \left(-\frac{5\pi}{12} \right) \right] \quad \text{ب-} \quad (3)$$

$$z_1 \cdot z_2 = \cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \rightarrow$$

$$z_2 = \frac{2}{\sqrt{2} + \sqrt{6}} \left[\cos \left(\frac{-\pi}{12} \right) + i \sin \left(\frac{-\pi}{12} \right) \right]$$

(4) عناصر التشابه: مركز التشابه S هو مبدأ المعلم O ، نسبة

التشابه هي $\frac{\sqrt{2}}{2}$ و زاويته هي $\frac{\pi}{4}$.

تمرين 19

(1) احسب طويلة و عمدة العدد المركب $\alpha = 6 - 6i\sqrt{3}$

واستنتج الجذرين التربيعيين للعدد α .

(2) حل في C المعادلة:

$$2z^2 - (5 + i\sqrt{3})z + 2(1 + i\sqrt{3}) = 0$$

الحقيقي بـ b و الجذر الآخر بـ a . (3) نعتبر التحويل T الذي

يحول النقطة M ذات اللاحقة z إلى النقطة M' بحيث

$$z' = az + b \quad (a \text{ و } b \text{ هما العددان من السؤال 2})$$

(3) حدد طبيعة و عناصر التحويل T.

- النتائج:

$$\alpha = 12 \left[\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right] \quad (1)$$

للعدد α هما: $-3 + i\sqrt{3}$ ، $3 - i\sqrt{3}$.

$$b = 2, \quad a = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \quad (2)$$

$$z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) z + 2 \quad (3) \quad \text{التحويل T هو دوران لأن:}$$

$$\left| \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right| = 1, \quad \text{زاويته } \frac{\pi}{3} \text{ و مركزه النقطة ذات اللاحقة}$$

$$1 + i\sqrt{3}$$

تمرين 20

في المستوي المركب المزود بمعلم متعامد و متجانس ، نعتبر النقط

$$A, B, C \text{ التي لواحقها على الترتيب } z_A = 3(1 + i\sqrt{3}),$$

$$z_B = \frac{1}{2}(9 + 5i\sqrt{3}), \quad z_C = \frac{3}{2}(1 + i\sqrt{3})$$

(1) عين لاحقة G مرجع الجملة:

$$\{(A; -1), (B; +1), (C; +1)\}$$

(2) عين لواحق النقط A' ، B' ، C' صور النقط A ، B ، C على الترتيب بالدوران الذي مركزه G وزاويته $\frac{2\pi}{3}$.

(3) بين أن المثلث ABC قائم .
- النتائج:

(1) $z_G = 3 + i\sqrt{3}$ الدوران معرف بـ

$z_{C'} = 3$ ، $z_{B'} = i\sqrt{3}$ ، $z_{A'} = 0$ ، $z' = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z + 6$

(3) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ فالمثلث ABC قائم في A .
تمرين 21

L عدد مركب حيث : $L = \frac{z+2i}{z-i}$ (1) أكتب على الشكل

(2) $L = \alpha + i\beta$ عين مجموعة النقط $M(x; y)$ ذات اللاحقة z التي من أجلها : أ - يكون L حقيقيا سالبا تماما .

ب - تكون عمدة L تساوي $\frac{\pi}{2}$. ج - $|L| = 1$.

- النتائج:

(1) $L = \frac{x^2 + y^2 + y - 2}{x^2 + (y-1)^2} + \frac{3x}{x^2 + (y-1)^2}i$

(2) مجموعة النقط M المطلوبة هي القطعة المستقيمة $[AB]$ حيث $A(0;1)$ و $B(0;-2)$ باستثناء A و B .

ب - مجموعة النقط M هي القوس \widehat{AB} حيث $A(0;1)$ و $B(0;-2)$ و تقع في الربع الأول و الرابع. ج - مجموعة النقط M المطلوبة هي المستقيم ذو المعادلة : $y = -\frac{1}{2}$.

تمرين 22

(1) عين العدد الحقيقي x بحيث $(x-i)^2 = 3-4i$.

(2) حل في \mathbb{C} المعادلة : $iz^2 - 3iz + 1 + 3i$.
- النتائج:

(1) $x = 2$. (2) حلا المعادلة هما : $z_1 = 1-i$ و $z_2 = 2+i$.

تمرين 23

لتكن في \mathbb{C} المعادلة (E) :

$z^3 - (3+i)z^2 + (6+2i)z - 4(1+i) = 0$

(1) عين العدد الحقيقي a حتى يكون $z_1 = a(1+i)$ حل للمعادلة .

(2) حل المعادلة (E) .

(3) أكتب الجذور الثلاثة للمعادلة (E) على الشكل المثلثي .

- النتائج:

(1) $a = 1$. (2) حلول المعادلة (E) هي :

$z_1 = 1+i$ ، $z_2 = 1-i\sqrt{3}$ ، $z_3 = 1+i\sqrt{3}$.

تمرين 25

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto \frac{z + \bar{z} - i}{z - i \times \bar{z}} \quad \text{نعتبر الدالة :}$$

- (1) عين مجموعة تعريف الدالة f .
- (2) حل في \mathbb{C} المعادلة $f(z) = i$ (3) عين مجموعة النقاط $M(x; y)$ التي لاحتقتها z حتى يكون $f(z)$ تخيليا صرفا.

- النتائج:

- (1) f معرفة إذا كان $z = x + iy$ و $x \neq y$.
- (2) حلول المعادلة $f(z) = i$ هي: $z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.
- (3) مجموعة النقاط M المطلوبة هو المستقيم (D) ذو المعادلة $x = -\frac{1}{2}$ باستثناء النقطة $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

تمرين 26

- (1) احسب طولية وعمدة العدد المركب $\alpha = \frac{1+i}{i\sqrt{3}+1}$.
- (2) استنتج جذور المعادلة $z^3 = \alpha$.
- (3) عين العدد الطبيعي n لكي يكون $\alpha^n \in \mathbb{R}$.

$$z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \quad (3)$$

$$z_2 = 2 \left[\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right]$$

$$z_3 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

تمرين 24

$$z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2} \quad , \quad z_2 = 1 - i$$

- (1) أكتب z_1 و z_2 على الشكل المثلثي. (2) استنتج طولية وعمدة

$$z = \frac{z_1}{z_2} \quad (3) \quad \text{احسب } \cos \frac{\pi}{12} \text{ و } \sin \frac{\pi}{12}.$$

- النتائج:

$$z_1 = \sqrt{2} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right] \quad (1)$$

$$z_2 = \sqrt{2} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right] \quad \text{و}$$

$$\arg z \equiv \frac{\pi}{12} [2\pi] \quad , \quad |z| = 1 \quad (2)$$

$$\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \quad \text{و} \quad \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \quad (3)$$

- النتائج:

$$|\alpha| = \frac{|1+i|}{|i\sqrt{3}+1|} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (1)$$

$$\arg(\alpha) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}[2\pi] = -\frac{\pi}{12}[2\pi]$$

(2) جذور المعادلة $z^3 = \alpha$.

$$z_0 = \frac{1}{\sqrt[6]{2}} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{36}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{36}\right) \right]$$

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt[6]{2}} \left(\cos \frac{23\pi}{36} + i \sin \frac{23\pi}{36} \right)$$

$$z_2 = \frac{1}{\sqrt[6]{2}} \left(\cos \frac{47\pi}{36} + i \sin \frac{47\pi}{36} \right)$$

(3) n من مضاعفات 12.

تمرين 27

عين ثلاثة أعداد مركبة A, B, C علما أن:

A, B, C حدود متتابعة من متتالية حسابية

و $A+B+C=3i$ و $A \times B \times C = 2-i$.

- النتائج:

$$A=1+2i \quad \text{و} \quad B=i \quad \text{و} \quad C=-1$$

$$\text{أو} \quad A=-1 \quad \text{و} \quad B=i \quad \text{و} \quad C=1+2i.$$

تمرين 28

(1) حل في \mathbb{C} المعادلة $z^4 = 1$.

(2) استنتج في \mathbb{C} حلول المعادلة: $[(\sqrt{3}-i)z+i]^4 = 1$

(3) نعتبر التحويل T الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة

z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث $z' = (\sqrt{3}-i)z+i$.

ما طبيعة التحويل T وما هي عناصره المميزة؟

- النتائج:

$$(1) \quad z_0 = 1, \quad z_1 = -1, \quad z_2 = i, \quad z_3 = -i.$$

(2) حلول المعادلة هي:

$$0, \quad \frac{-\sqrt{3}+1}{4} - \frac{\sqrt{3}+1}{4}i, \quad \frac{\sqrt{3}+1}{4} + \frac{-\sqrt{3}+1}{4}i, \quad \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

(3) التحويل T هو تشابه نسبته 2 وزاويته هي:

$$\arg(\sqrt{3}-i) = -\frac{\pi}{6}$$

$$\frac{i}{1-(\sqrt{3}-i)}$$

تمرين 29

(1) حل في \mathbb{C} المعادلة: $z^2 - 2i = 0$.

(3) عين قيم العدد n حتى يكون $z^n \in \mathbb{R}$.
- النتائج:

$$\arg z_1 \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi] , \quad |z_1| = 1 \quad (1)$$

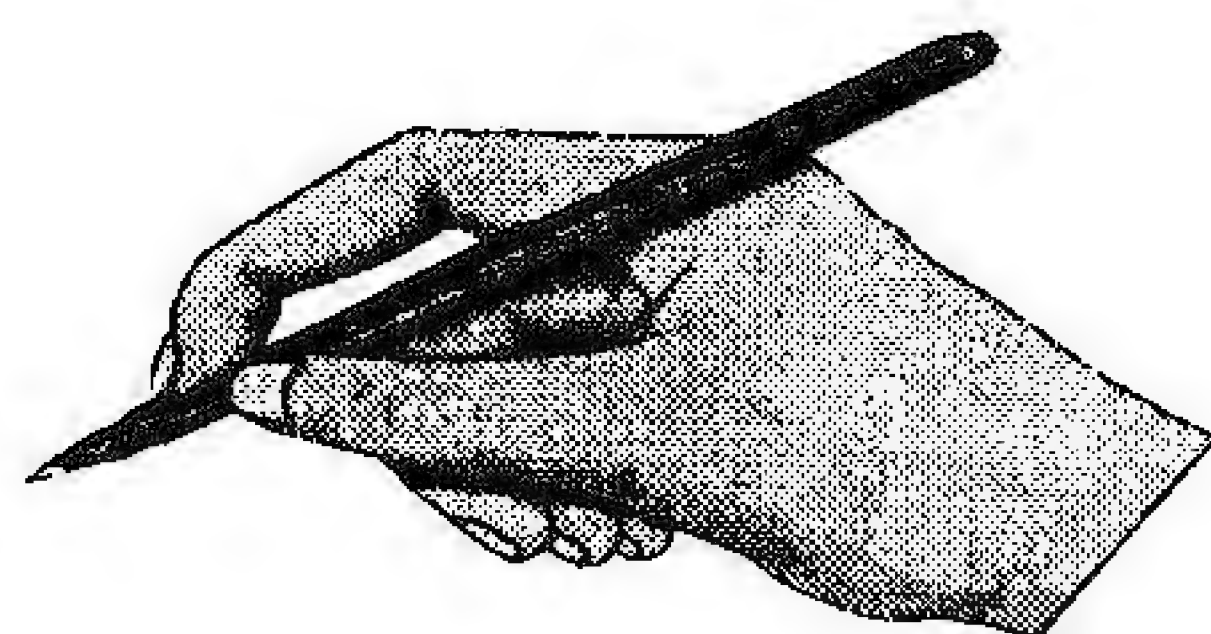
$$\arg z_2 \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi] , \quad |z_2| = 1$$

$$z = \cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \quad (2)$$

$$z = -\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} + i \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

$$\sin \frac{11\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \text{ و } \cos \frac{11\pi}{12} = -\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

(3) n من مضاعفات 12.



(2) نعتبر المتتالية الهندسية المعرفة بـ : $V_2 = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$

و $V_4 = -\sqrt{3} + i$. - عين أساس هذه المتتالية.

(3) نعتبر المتتالية الهندسية التي أساسها جزؤه الحقيقي موجب .
أحسب V_{19} وعين طويلته وعمدته.

- النتائج:

$$(1) \quad z = -1 - i \text{ أو } z = 1 + i$$

$$(2) \quad q = -1 - i \text{ أو } q = 1 + i$$

$$V_{19} = V_0 \times q^{19} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i \right) \times (1 + i)^{19} \quad (3)$$

$$\text{ومنه : } |V_{19}| = 2^8 \sqrt{2} , \quad \arg(V_{19}) \equiv \frac{7\pi}{12} [2\pi]$$

تمرين 30

$$z_1 \text{ و } z_2 \text{ عدنان مركبان حيث : } z_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right)^4$$

$$(1) \text{ احسب طويلة وعمدة كل من } z_1 \text{ و } z_2 . \quad z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(2) عين الشكل الجبري و المثلثي للعدد المركب $z = \frac{z_1}{z_2}$ ثم استنتج

$$\text{قيمة } \cos \frac{11\pi}{12} \text{ و } \sin \frac{11\pi}{12} .$$

تمارين مقترحة للحل

تمرين 01

نعتبر العدد المركب $\alpha = \frac{z+4i}{z-4i}$ حيث $z = x + iy$

(1) أكتب α على الشكل الجبري (2) أ - عين E_1 مجموعة النقط

$M(z)$ حيث $Arg\alpha \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ ب - عين E_2 مجموعة

النقط $M(z)$ التي من أجلها يكون α حقيقيا سالبا

تمرين 02

لتكن في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة (I) ذات المجهول z

$$(I) \quad z^2 - (\sqrt{3} + 1 + 2i)z + (\sqrt{3} - 1) + i(\sqrt{3} + 1) = 0$$

(1) أ - احسب $(\sqrt{3} - 1)^2$ ثم حل في \mathbb{C} المعادلة (I). نسمي

z_1 و z_2 حلي هذه المعادلة حيث $|z_1| > |z_2|$ ب - أكتب z_1

و z_2 على الشكل المثلثي ثم استنتج كتابة العدد المركب $z_1 \cdot z_2$ على

الشكل المثلثي ج - استنتج قيمة $\cos \frac{5\pi}{12}$ و $\sin \frac{5\pi}{12}$

(2) عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $\left(\frac{z_1 \cdot z_2}{2\sqrt{2}} \right)$ عددا حقيقيا

تمرين 03

ليكن $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ حيث: $r \in \mathbb{R}_+^*$ و $\theta \in [0; 2\pi]$

(1) احسب z^2 و $(1+i) \times \bar{z}$ بدلالة r و θ . (\bar{z} مرافق z)

(2) حل في \mathbb{C} المعادلة: $z^2 = (1+i)\bar{z}$

تمرين 04

(1) أوجد الجذور من الرتبة الرابعة للعدد 1

(2) أ - أنشر و بسط: $(z-1)(z^3 + z^2 + z + 1)$

ب - حل في \mathbb{C} المعادلة $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$

(3) نعتبر في \mathbb{C} المعادلة ذات المجهول z : $(z-2i)^4 = -4$ (*)

أ - تحقق أن $(1+i)$ هو حل للمعادلة (*) ب - حل في \mathbb{C} المعادلة (*)

تمرين 05

(1) حل في \mathbb{C} المعادلة (*)

$$2(1+i)z^2 + 2(\lambda+i)z + i\lambda(1-i) = 0 \quad \text{حيث } \lambda \text{ عدد}$$

مركب طويلته r و عمدته θ

(2) حدد r و θ لكي يكون z_1 و z_2 متعاكسان (نرمز بـ z_1 إلى

الجذر المستقل عن λ و z_2 الجذر الآخر).

(3) نفرض أن: $\lambda = 1-i$ و A, B, M هي صور الأعداد

المركبة z_1 و z_2 و z على الترتيب - عين مجموعة النقط

$M(z)$ حتى يكون المثلث AMB قائم في B

تمرين 06

نعتبر في المستوى المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس التحويل T الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ حيث :

$$z - 2 = (1 + i\sqrt{3})^n \cdot z' \quad \text{إذا كان } n = 1 . \text{ ما طبيعة التحويل}$$

T و ما هي عناصره المميزة ؟ (2) عين العدد الطبيعي n حتى يكون التحويل T تحاكي.

تمرين 07

(1) حل في \mathbb{C} المعادلة : $i^5 = 1$ ، تعطى الحلول على الشكل المثلي .

(2) برهن أن مجموع الحلول يساوي 0 .

$$(3) \text{ استنتج أن : } \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{2}$$

$$(4) \text{ عبر عن } \cos \frac{4\pi}{5} \text{ بدلالة } \cos \frac{2\pi}{5} \text{ ثم احسب } \cos \frac{2\pi}{5} \text{ و } \cos \frac{4\pi}{5} .$$

تمرين 08

باستعمال دستور موافر احسب :

$$\sin 4x \text{ و } \cos 4x \text{ بدلالة } \sin x \text{ و } \cos x .$$

تمرين 09

ليكن كثير الحدود $P(z)$ المعروف في \mathbb{C} بـ :

$$P(z) = az^3 + bz^2 + cz \quad \text{حيث : } a, b, c \text{ أعداد مركبة .}$$

$$(1) \text{ عين } a, b, c \text{ علما أن : } P(1) = -2 + i \text{ و } P(i) = -1 - 2i$$

$$(2) \text{ تأخذ القيم التي وجدت في السؤال السابق .}$$

حل المعادلة $P(z) = 0$ في المستوى المركب المنسوب إلى

معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ نعتبر النقط O, B, A ذات

الواحد على الترتيب $0, 2, -1 + i$. عين لاحقة النقطة C حتى يكون الرباعي $AOBC$ متوازي الأضلاع.

تمرين 10

$$(1) \text{ حل في } \mathbb{C} \text{ المعادلة : } z^2 - (4 + 3i\sqrt{3})z + 4 + 6i\sqrt{3} = 0 \dots (*)$$

ليكن z_1 و z_2 حلا المعادلة (*) حيث $M_1, M_2, M_3 \in \mathbb{R}$

نقط من المستوى المركب لواحقها على الترتيب z_1, z_2 ،

$$(2) \text{ حدد عناصر التشابه المباشر بحيث } -7 + 6i\sqrt{3}$$

$$S(M_1) = M_2 \text{ و } S(M_2) = M_3 \text{ (3) عين لاحقة } G \text{ مركز}$$

$$\text{ثقل المثلث } M_1 M_2 M_3 .$$

تمرين 11

نريد حل في المجموعة \mathbb{C} المعادلة (e) :

$$(e) : z^4 - (1 + i\sqrt{5})z^3 + (2 + i\sqrt{5})z + 1 = 0$$

(1) - برهن أن z هو حل للمعادلة (e) إذا و فقط إذا كان :

$$\alpha = z + \frac{1}{z} \text{ هو حل للمعادلة (E) :}$$

$$\alpha^2 - (1 + i\sqrt{5})\alpha + i\sqrt{5} = 0$$

ب - حل في \mathbb{C} المعادلة (E) واستنتج حلول المعادلة (e).

(2) في المستوى المركب نعتبر النقط A, B, C, D التي لواحقتها على الترتيب $z_A = \left(\frac{\sqrt{5}-3}{2}\right)i, z_B = \left(\frac{\sqrt{5}+3}{2}\right)i$

$$z_D = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, z_C = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$$

للتحاكي h بحيث: $h(A) = C, h(B) = D$. عين العبارة المركبة

تمرين 12

يعطى العدد المركب α حيث: $\alpha = \sqrt{2-\sqrt{2}} - i\sqrt{2+\sqrt{2}}$.
(1) احسب α^2 و α^4 . (2) أكتب α^4 على الشكل المثلثي ثم استنتج من ذلك طول α و عمدته. (2) نعتبر المستوي (π) المزود بمعلم متعامد و متجانس، نرفق بكل نقطة $M(x; y)$ بلاقتها z . عين مجموعة النقط M من (π) بحيث: $|\alpha z| = 8$.

تمرين 13

(1) أكتب على الشكل المثلثي العدد المركب $(-1-i)$.

$$(2) \text{ حل في } \mathbb{C} \text{ المعادلة: } \frac{(-1-3i)z+3+i}{z-i} = z$$

نرمز بـ z_0 للحل الذي له أصغر طول (3). أ- احسب $\left(\frac{z_0}{\sqrt{2}}\right)^{1984}$ و أكتبه على الشكل الجبري. ب- ما هي قيم العدد الطبيعي n التي

من أجلها يكون العدد المركب $\left(\frac{z_0}{\sqrt{2}}\right)^n$ عددا حقيقيا.

تمرين 14

نعتبر في المجموعة \mathbb{C} العدد

$$f(z) = \frac{(4-6i)z+1+3i}{2z-1-i}$$

(1) بوضع $z = x + iy$ أكتب $f(z)$ على الشكل الجبري.

(2) حل في \mathbb{C} المعادلة $f(z) = 2z$. نرمز لحلي المعادلة بـ z' و z'' بحيث $|z'| > |z''|$. (3) أ- احسب طول z' و عمدة العدد المركب $z' - 2iz''$. ب- أوجد مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون العدد $(z' - 2iz'')^n$ حقيقيا.

تمرين 15

(1) حل في \mathbb{C} المعادلة:

$$(iz-1)[z^2-(1+4i)z-(5+i)] = 0 \quad \dots (E)$$

يرمز بـ z_0, z_1, z_2 إلى حلول المعادلة (E) بحيث:

$$|z_0| < |z_1| < |z_2| \quad (2) \text{ المستوي } (\pi) \text{ مزود بمعلم متعامد}$$

ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. لكان النقط A, B, C, M من

المستوي (π) التي لواحقتها z_0, z_1, z_2, z على الترتيب.

أ- أوجد إحداثي النقطة G مرجعا للنقط A, B, C المرفقة بالمعاملات 1, 2, 1 على الترتيب.

ب- احسب GA ، GB ، GC . ج- عين مجموعة النقط M

بحيث: $|z - z_0|^2 + 2|z - z_1|^2 + |z - z_2|^2 = 34$.

تمرين 16

1) حل في \mathbb{C} المعادلة: $z^2 - (7 + 3i)z + 10 + 10i = 0$ نرسم

لحلي المعادلة ب: z_1 ، z_2 بحيث: $|z_1| < |z_2|$ (2) - احسب

طويلة العدد المركب $(z_1 \times z_2)$ و عمدته. ب- عين قيم n حتى

يكون $(z_1 \times z_2)^n$ عددا تخيليا صرفا مع $100 < n < 130$.

3) المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \bar{i}; \bar{j})$.

A ، B صورتا z_1 ، z_2 على الترتيب ، C النقطة التي

إحداثياتها $(0; 2)$. - عين مركز ونسبة و زاوية التشابه المباشر

S الذي يحقق $S(A) = B$ و $S(C) = O$.

تمرين 17

نعتبر العددين المركبين z_1 ، z_2 حيث:

$$z_1 = 2 + 2i , z_2 = 1 - i\sqrt{3}$$

1) أكتب z_1 و z_2 على الشكل المثلثي . 2) في المستوي المركب

المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O; \bar{i}; \bar{j})$ نعتبر النقطتين A ، B

اللتين لاحقتاهما على الترتيب z_1 و z_2 . الدوران R الذي مركزه

النقطة O و زاويته $\frac{5\pi}{6}$ يحول النقطة A إلى النقطة C .

أ- عين z_3 لاحقة C هي $z_3 = -(1 + \sqrt{3}) + (1 - \sqrt{3})i$

ب- برهن أن حاصل القسمة $\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2}$ هو عدد تخيلي صرفا . -

احسب طويلته و عمدته هذا الحاصل . - فسر هندسيا هذه الناتج مع
تعين طبيعة المثلث ABC .

تمرين 18

ليكن f التطبيق من $\mathbb{C} - \{2i\}$ نحو \mathbb{C} المعروف ب :

$$f(z) = \frac{2z - i}{z - 2i} \quad (1) \quad \text{أ- حل المعادلة } f(z) = z$$

ب- أكتب z_1 و z_2 حلول المعادلة على الشكل الجبري و المثلثي .

ج- احسب العدد $z_1^4 + z_2^4$.

2) نرسم $M(x; y)$ إلى صورة العدد المركب z في المستوي

المركب المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O; \bar{i}; \bar{j})$. ليكن (Γ)

مجموعة النقط M بحيث يكون $f(z)$ تخيليا صرفا . أوجد

معادلة (Γ) . 3) برهن أن طويلة z هي 1 إذا و فقط إذا كانت

طويلة $f(z)$ هي 1 .

تمرين 19

حل في \mathbb{C}^2 الجملتين:

$$(1) \begin{cases} z_1^2 + z_2^2 = 2 \\ z_1 \cdot z_2 = 1 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} z_1 + 2z_2 = i \\ z_1 \cdot z_2 = 1 \end{cases}$$

تمرين 20

نعتبر العدد المركب $z = 1 + \cos \theta - i \sin \theta$ حيث $\theta \in [0; 2\pi]$ احسب بدلالة θ طولاً و عمدة العدد المركب

$$z \text{ و } z' = \frac{1}{\bar{z}} \text{ (} \bar{z} \text{ هو مرافق } z \text{) .}$$

تمرين 21

ليكن كثير الحدود :

$$P(z) = z^4 - 8(1+i)z^3 + 48iz^2 + 64(1-i)z - 80$$

1- أ) برهن أن المعادلة $P(z) = 0$ تقبل جذراً حقيقياً z_0 وجذراً تخيلياً صرفاً z_1 يطلب تعيينهما .

ب) عين العددين الحقيقيين a و b بحيث :

$$P(z) = (z - z_0)(z - z_1)(z^2 + az + b)$$

2) حل المعادلة $P(z) = 0$ في المستوى المزود بمعلم متعامد ومتجانس نعتبر النقط $A(2; 0)$ ، $B(0; 2)$ ، $C(2; 4)$ ، $D(4; 2)$.

R هو الدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$ ، عين عبارة الدوران

R ثم تحقق أن $R(D) = B$.

تمرين 22

نعتبر في \mathbb{C} المعادلة التالية حيث $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

$$z^2 - (1 + \cos \theta)iz - (1 + \cos \theta) + (1 - \cos \theta)i = 0 \dots (*)$$

1- أ) تحقق أن $z_0 = 1 + i \cos \theta$ هو حل للمعادلة (*).
ب) استنتج الجذر الآخر z_1 .

2- أ) احسب $(z_0 + z_1)^4$.

ب) عين العدد الطبيعي n لكي يكون $(z_0 + z_1)^n \in \mathbb{R}$.
3) في المستوى المزود بمعلم متعامد ومتجانس ، نعتبر التحويل T الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ حيث :
 $z' = (\sin \theta + i \cos \theta)z + (1 - \cos \theta)i$
- ما طبيعة التحويل T ، وما هي عناصره المميزة .

تمرين 23

باستعمال القانونين لأولار (Euler) :

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \text{ و } \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

أكتب على شكل عبارة خطية ما يلي :

$$\sin^2 x \cdot \cos^4 x \quad (1) \quad \sin x \cdot \cos^3 x \quad (2)$$

تمرين 24

1) عين العددين الحقيقيين x و y حيث : $(x + iy)^2 = 8 + 6i$.

2) حل في \mathbb{C} المعادلة : $iz^2 + (1 - 3i)z - (3 - 4i) = 0$.

3- أ) برهن أن المعادلة :

$$iz^3 + (1 - 5i)z^2 - (5 - 10i)z + 2(3 - 4i) = 0 \dots (*)$$

تقبل جذراً حقيقياً z_0 يطلب تعيينه . ب) حل في \mathbb{C} المعادلة (*)

نرمز بـ z_0, z_1, z_2 إلى حلول المعادلة (*) حيث :
حقيقي (z_2) أكبر من حقيقي (z_1) .

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس ، نعتبر النقاط
 A, B, C ذات اللواحق على الترتيب z_0, z_1, z_2 .
(1) برهن أن المثلث OBC هو قائم الزاوية ومتساوي الساقين.
(2) عين لاحقة D لكي يكون الرباعي $OBCD$ مربعا .

تمرين 25

نعتبر في \mathbb{C} المعادلة ذات المجهول z :

$$(*) \dots (z + 1 - 3i)[z^2 + (-4 + i)z + 4 - 2i] = 0$$

(1) حل هذه المعادلة علما أنها تقبل حلا حقيقيا.
(2) مثل في مستوي الأعداد المركبة النقاط A, B, C صور
 z_0, z_1, z_2 حلول المعادلة (*).
(3) عين لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABC .
(4) عين مجموعة النقاط $M(z)$ حيث :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = K \text{ (ناقش حسب العدد الحقيقي } K \text{)}$$

تمرين 26

$$L = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} + i \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \text{ نعتبر العدد المركب}$$

(1) أ - احسب L^2, L^4 . ب - اكتب L^4 على الشكل المثلثي .

(2) أ - استنتج طولية و عمدة L . ب - عين $\cos \frac{\pi}{12}$ و $\sin \frac{\pi}{12}$.

(3) عين العدد الطبيعي n لكي يكون L^n حقيقيا .

تمرين 27

نعتبر العدد المركب $L = \frac{\bar{z} + 2 + i}{1 - iz}$ حيث \bar{z} هو مرافق z .

(1) اوجد العدد المركب z بحيث $L = 1 + i$.
(2) المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس، لتكن النقطة
 M التي لاحقتها $z = x + iy$. أ) اكتب L على الشكل الجبري .
ب) عين المجموعة (γ) مجموعة النقاط $M(z)$ بحيث L يكون
عددا حقيقيا. ج) عين مجموعة النقاط $M(z)$ بحيث $|L| = 2$.

تمرين 28

نعتبر في المجموعة \mathbb{C} المتتاليتين (S_n) و (L_n) المعرفتين بـ:
 $S_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n :

$$S_{n+1} = (1 + i\sqrt{3})S_n + 3 \text{ و } L_n = S_n - i\sqrt{3}$$

(1) برهن أن المتتالية (L_n) هندسية يطلب تعيين حدها الأول
وأساسها q .

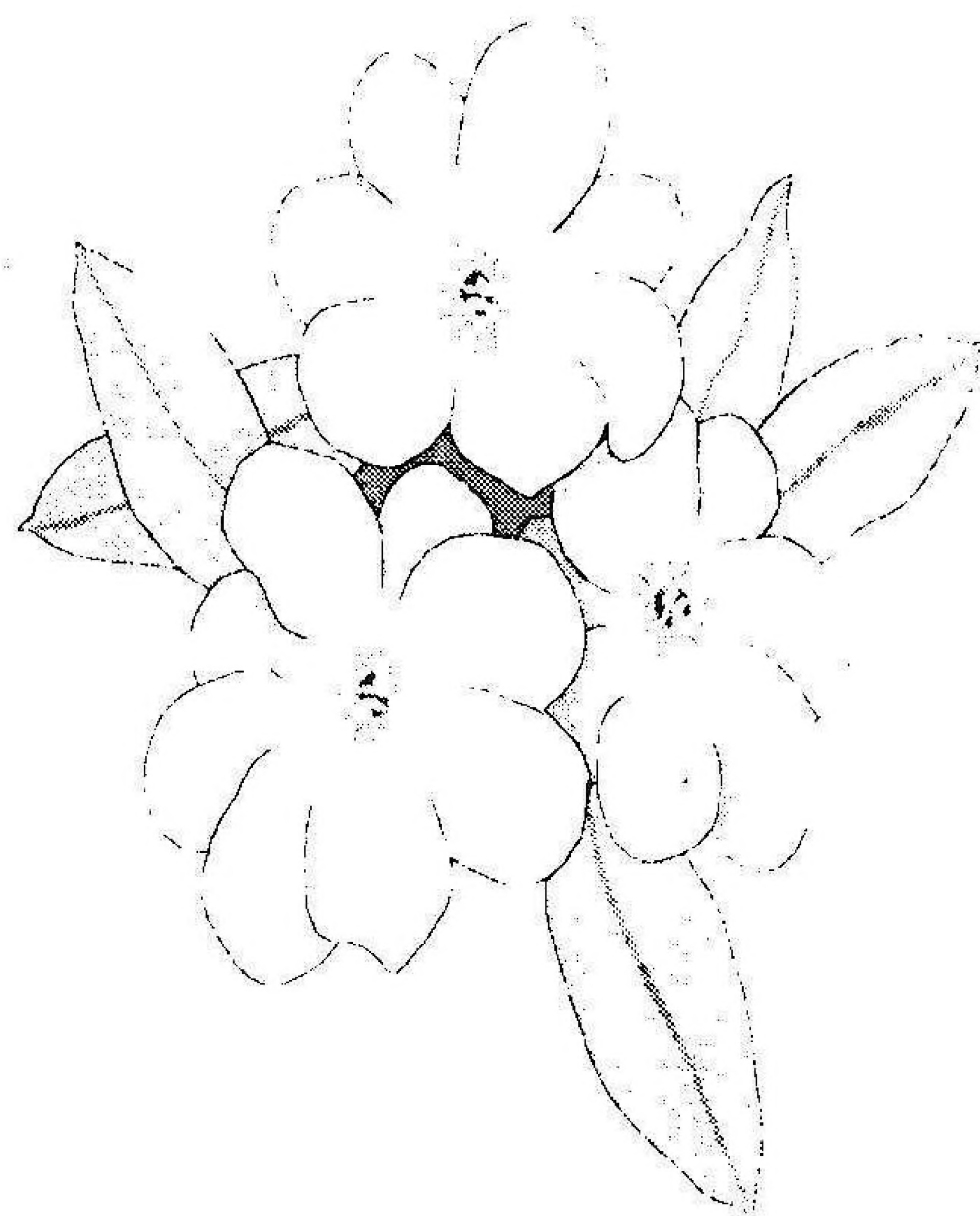
(2) عبر عن L_n و S_n بدلالة n .

(3) نعتبر التحويل T الذي يوافق بكل نقطة M ذات اللاحقة
 z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث :

$$z' = (1 + i\sqrt{3})z + (1 - i\sqrt{3})$$

(أ) ما طبيعة التحويل T ؟ . ب) عين العناصر المميزة للتحويل T .

فربج اخرج لي جذري و يصر لي امري و احل معقدة من
لمايي يفتحموا قولي



تمرين 29
نعتبر الدالة f المعرفة ب :

$$\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto f(z) = \frac{z}{1+iz}$$

حيث : $z \in \mathbb{C} - \{i\}$.

1- (أ) حل المعادلة $f(z) = \frac{1}{z}$ وليكن z' ، z'' جذري هذه المعادلة

حيث $R(z') > 0$ و z'' الحلا الآخر. (ب) أكتب z' ، z'' على الشكل
المثلثي. (ج) أحسب $(z')^6 + (z'')^6$.

(2) أثبتان $f(z)$ يكون تخيليا صرفا إذا وفقط إذا كان z تخيليا صرفا

تمرين 30

(1) حل في \mathbb{C} المعادلة $z^2 - (5 + i\sqrt{3})z + 4 + 4i\sqrt{3} = 0$


2- (أ) أكتب الجذرين على الشكل المثلثي.
(ب) استنتج حلول المعادلة.


$$z^4 - (5 + i\sqrt{3})z^2 + 4 + 4i\sqrt{3} = 0 \quad (*)$$

لتكن N_1 ، N_2 ، N_3 ، N_4 صور حلول المعادلة (*) في معلم
متعامد ومتجانس.


(3) ما طبيعة الرباعي $N_1 N_4 N_2 N_3$ ؟

المفهرس

5.....الملخص 

9.....تمارين محلولة 

95.....تمارين مرفقة بالحل 

122.....تمارين مقترحة للحل 

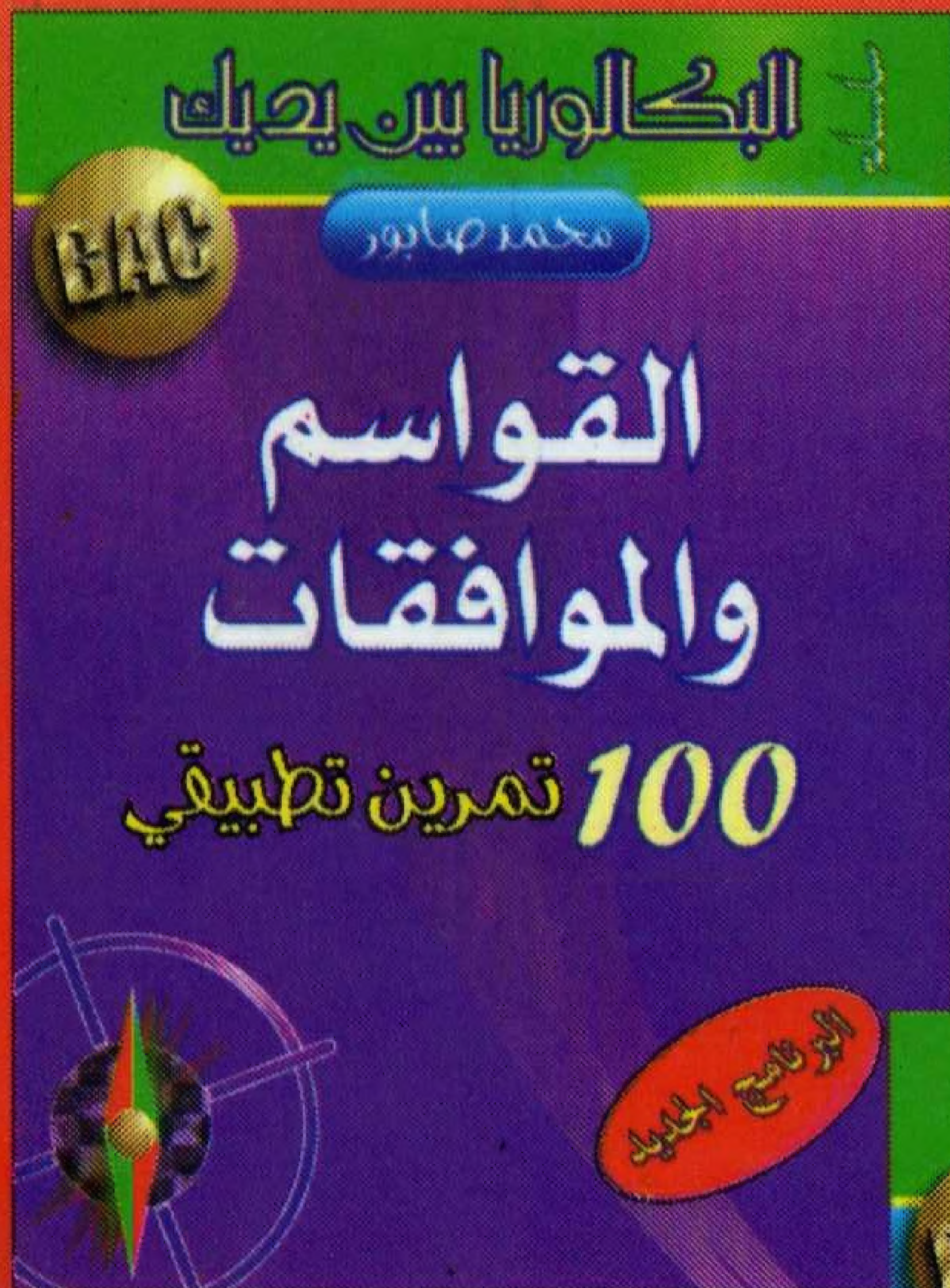
136الفهرس •

الرجاء الدعاء لمؤلف الكتاب
و الدعاء للوالد الكريم - رحمه الله -

وفق الله الجميع

Scanned by : Mekkaoui Ayoub
Email: ayoubsoft2011@hotmail.fr

في نفس السلسلة



Scanned by : Mekkaoui Ayoub
Email: ayoubsoft2011@hotmail.fr



ISBN : 978-9947-0-1864-4